Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2007
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 3z + 9 = 0.$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \frac{3}{2} + \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad z_{\text{B}} = \frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

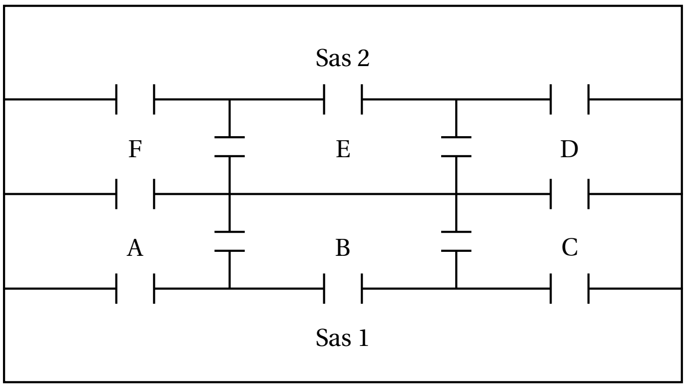
   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}, puis les écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   b. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   c. Justifier que les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et M un point du plan d'affixe z.
   On note M' le point d'affixe z' image du point M d'affixe z par cette rotation.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation R.

4. On considère les points C et D du plan $\mathscr{P}$, d'affixes respectives $z_{\text{C}} = -3$ et $z_{\text{D}} = 4$.
   a. Placer les points C et D sur le graphique précédent.
   b. Calculer les distances OD, DC et AB.
   c. On note I le milieu du segment [AH].
      Calculer la distance IB et déduire la valeur exacte $\mathscr{A}_1$ de l'aire du triangle CBD.
   d. On note $\mathscr{A}_2$ l'aire du triangle AOD. Calculer la valeur du quotient $\dfrac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

— Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
— Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
— Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
— Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
— Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :
  — Soit par le sas 1,
  — Soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.

Exemples :

— ABC et BCD sont des trajets.
— CBA et ABC sont deux trajets différents.
— ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
— DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).

1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.

2. **a.** Calculer la probabilité p_1 de l'évènement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».

b. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement « le robot sort par le sas 2 ».

3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Que représente ce nombre ?

d. Calculer la probabilité p_3 de l'évènement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60 minutes » ?

4. On appelle $\sigma(\mathrm{X})$ l'écart type de la variable aléatoire X.

a. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(\mathrm{X})$

b. Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7. Soit n un entier naturel non nul. On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre :

$$n \times \mathrm{E(X)} + 1,5 \times \sigma(\mathrm{X}) \times \sqrt{n}$$

est inférieur à 500 heures. Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an ?

PROBLÈME 10 points

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x(1 + \ln x)$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = 2 + \ln x.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire les variations de la fonction g sur cet intervalle.

3. Calculer la valeur exacte du minimum de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$?

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

b. En utilisant le résultat obtenu dans la partie A, question 4, dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.
Donner la valeur décimale arrondie au dixième du nombre réel α.

5. Tracer dans le plan $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,\mathrm{e}]$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Hachurer, sur le graphique obtenu dans la partie B, la partie $\mathcal{E}$ du plan, limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathcal{E}$ en cm^2.