Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2011 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
On notera sur la copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A et B deux points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}. On sait que $|z_{\text{A}}| = \sqrt{3}$ et $|z_{\text{B}}| = 3$. On sait aussi qu'un argument z_{A} est égal à $\frac{\pi}{3}$ et qu'un argument de z_{B} est égal à $\frac{\pi}{4}$.
La forme exponentielle du produit $z_{\text{A}} \times z_{\text{B}}$ est :

   a. $3\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{12}}$ **b.** $3\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{12}}$ **c.** $3\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{7}}$

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
L'image du point C(2 ; 4) par la rotation r est le point D de coordonnées :

   a. $\left(\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\right)$ **b.** $\left(-\sqrt{2}\,;\,-3\sqrt{2}\right)$ **c.** $\left(-\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{2}\right)$

3. La forme algébrique du nombre complexe $\frac{1}{2+\text{i}}$ est :

   a. $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\text{i}$ **b.** $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\text{i}$ **c.** $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\text{i}$

4. Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$. Le nombre complexe z^{2011} est égal à :

   a. $5\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **c.** $3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$

5. Soit l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. La somme des racines de cette équation est égale à :

   a. -2 **b.** 3i **c.** 2

EXERCICE 2 **5 points**

Un jeu en ligne propose aux internautes d'effectuer des missions de difficulté croissante qui, si elles sont réussies, permettent de valider successivement le niveau 1, puis le niveau 2, et enfin le niveau 3.
De plus, les joueurs peuvent bénéficier d'un bonus de rapidité d'un montant de 3 € lorsque le dernier niveau validé l'a été en moins de deux minutes.
Une enquête portant sur 1 200 joueurs a été réalisée.

- 60 % de ces joueurs ont validé le niveau 1 uniquement, et parmi eux, 20 % ont obtenu le bonus de rapidité.

- 120 joueurs ont validé les trois niveaux, et parmi eux, 6 ont obtenu le bonus de rapidité.
- Au total 186 joueurs ont obtenu le bonus de rapidité.

1. Compléter le tableau dans l'**ANNEXE 1, à rendre avec la copie.**

Joueurs ayant validé :	le niveau 1 uniquement	les niveaux 1 et 2	les trois niveaux	Total
avec bonus				
sans bonus				
Total				1 200

2. On choisit un joueur au hasard dans ce groupe.

a. Quelle est la probabilité qu'il ait validé les niveaux 1 et 2 sans bonus ?

b. Quelle est la probabilité qu'il ait validé les 3 niveaux avec bonus ?

3. Chaque joueur doit payer une mise de 5 € pour participer au jeu. Le règlement du jeu est alors défini comme suit :

- sans bonus, la validation du niveau 1 ne rapporte rien,
- sans bonus, la validation des niveaux 1 et 2 rapporte 4 €.
- sans bonus, la validation des trois niveaux rapporte 7 €.

À cela s'ajoute le bonus de rapidité d'un montant de 3 € qui ne peut être attribué qu'une seule fois, dans les conditions précisées en introduction.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros. On rappelle que le gain est la différence entre la somme rapportée et la mise. Il peut être positif ou négatif.

a. Donner la liste des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

4. Donner une interprétation de E(X).

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \ln x + ax + b,$$

où a et b désignent deux nombres réels, et on note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
On sait que le tableau de variations de f sur $]0\,;\,10]$ est le suivant :

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-2+\ln 2$	$\searrow$	$-6+\ln 10$

Partie A

1. Déduire du tableau de variations le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   À l'aide de données numériques du tableau de variations, calculer a et b.

Partie B

On admet que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,10]$,

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x - 1.$$

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,10]$ par

$$g(x) = (\ln x)^2 - x - 2\ln x$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est fournie dans l'**ANNEXE 2 à rendre avec la copie.**

1. **a.** Déterminer la limite de g en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. **a.** Montrer que pour tout x de $]0\,;\,10]$, $g'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$.
   b. Déterminer les variations de la fonction g sur $]0\,;\,10]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[0,1\,;\,10]$.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Partie C

Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par

$$G(x) = x(\ln x)^2 - 4x\ln x + 4x - \frac{1}{2}x^2.$$

1. Vérifier que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,10]$.
2. Sur l'**ANNEXE 2 à rendre avec la copie**, figure la courbe $\mathscr{C}$. Tracer la droite T et hachurer le domaine Δ limité par la droite T, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
3. On admet que la droite T est toujours située au dessous de la courbe $\mathscr{C}$. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine.

ANNEXE 1 à rendre avec la copie

Joueurs ayant validé :	le niveau 1 uniquement	les niveaux 1 et 2	les trois niveaux	Total
avec bonus				
sans bonus				
Total				1 200

ANNEXE 2 à rendre avec la copie