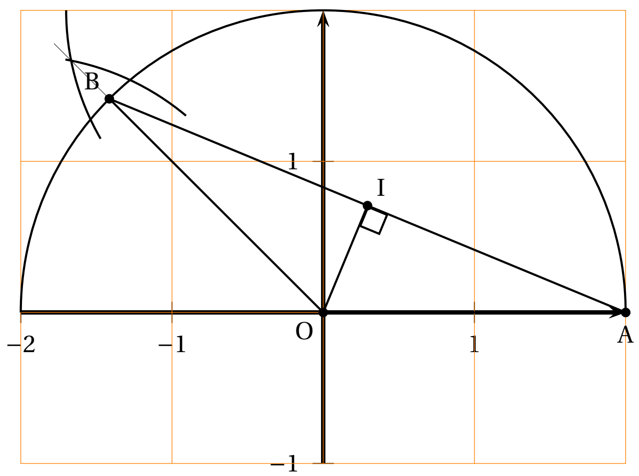
Corrigé du baccalauréat STI Métropole 15 septembre 2011 Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans $\mathbb{C}$, $\quad (z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)=0 \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0\\ z^2+2\sqrt{2}z+4 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2\\ z^2+2\sqrt{2}z+4 & = & 0\end{array}\right.$
Résolution de l'équation du second degré : $\Delta = 8-4\times 4=-8=\left(2\text{i}\sqrt{2}\right)^2<0$.
L'équation a donc deux solutions complexes :
$z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}+2\text{i}\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$ et $z_3=\dfrac{-2\sqrt{2}-2\text{i}\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc :
$z_1=2,\quad z_2=-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$ et $z_3=-\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}$.
2. On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}}=2$.
   a. Voir la figure.
   b. Par définition complexe de la rotation on a :
   $z_{\text{B}}-z_{\text{O}}=\text{e}^{\frac{3\pi}{4}}\left(z_{\text{A}}-z_{\text{O}}\right)$, soit avec $\text{e}^{\frac{3\pi}{4}}=\cos\dfrac{3\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
   $z_{\text{B}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2=-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$.
   c. L'écriture exponentielle $z_{\text{B}}=2\text{e}^{\frac{3\pi}{4}}$ montre que OB $=2$ (évident puisque la rotation conserve les distances) et qu'un de ses arguments est $\dfrac{3\pi}{4}$.
   Il suffit donc de tracer le cercle de centre O, de rayon 2 et la bissectrice du second secteur angulaire : le point commun d'abscisse négative et d'ordonnée positive est le point B.
3. On a $z_{\text{I}}=\dfrac{1}{2}\left(z_{\text{A}}+z_{\text{B}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}$.
Le point I est le point commun au segment [AB] et à sa médiatrice.
4. Le triangle AOB est isocèle en O, puisque OA $=2=$ OB. I étant le milieu de [AB], la demi-droite [OI) est médiane et donc bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$
5. D'après la question précédente On a $\widehat{\text{AOI}}=\dfrac{1}{2}\widehat{\text{AOB}}=\dfrac{3\pi}{8}$; dans le triangle AOB, la médiane [OI) est aussi hauteur, donc le triangle AOI est rectangle en I ; par complément à $\dfrac{\pi}{2}$, $\ \widehat{\text{OAI}}=\dfrac{\pi}{8}$.
6. Dans le triangle AOI rectangle en I, par définition du cosinus :
AI $=$ AO$\cos\dfrac{\pi}{8} \iff \cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\text{AI}}{\text{OA}}$.
Or d'après la question 3. $\text{AB}^2=\left(2-\left(-\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=4+2+4\sqrt{2}+2=8+4\sqrt{2}=4\left(2+\sqrt{2}\right)$. D'où AB $=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et enfin AI $=\dfrac{1}{2}$AB $=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
Donc $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\text{AI}}{\text{OA}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.



EXERCICE 2 **5 points**

1. a. Il y a $16+18+15+13=62$ boîtes contenant 3 guirlandes sur 200 boîtes.
La probabilité est donc égale à $\dfrac{62}{200}=\dfrac{31}{100}=31\,\%=0,31$.
b. Il y a $11+11+13+15+13+15+16=94$ boîtes contenant 16 ampoules ou 2 guirlandes
La probabilité d'avoir une boîte qui contient des guirlandes de 16 ampoules ou une boîte qui contient 2 guirlandes, est donc égale à $\dfrac{94}{200}=\dfrac{47}{100}=0,47$.
c. Il y a $16+11=27$ boîtes de 2 guirlandes contenant au moins 12 ampoules.
La probabilité d'avoir une boîte qui contient 2 guirlandes ayant au moins 12 ampoules, est donc égale à $\dfrac{27}{200}=\dfrac{13,5}{100}=0,135$.
2. a. Il y a $13+16+15+9=53$ boîtes contenant 12 ampoules par guirlande.
La probabilité de l'évènement $(\mathrm{X}=12)$ est donc égale à $\dfrac{53}{200}=0,265$.
b. On a de même $p(\mathrm{X}=8=\dfrac{9+13+16+6}{200}=\dfrac{44}{200}$;
$p(\mathrm{X}=10=\dfrac{12+15+18+8}{200}=\dfrac{53}{200}$;
$p(\mathrm{X}=16=\dfrac{11+11+13+15}{200}=\dfrac{50}{200}$;
donc $\mathrm{E(X)}=8\times\dfrac{44}{200}+10\times\dfrac{53}{200}+12\times\dfrac{53}{200}+16\times\dfrac{50}{200}=\dfrac{352+530+636+800}{200}=\dfrac{2318}{200}=11,59\approx 12$.
c. C'est le nombre moyen d'ampoules par guirlande dans une boîte pour un grand nombre de boîtes tirées.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude de la fonction f

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty$, d'où par produit de limites :
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x}$.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Géométriquement, ce résultat montre que l'axe des abscisses est asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.

3. f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = 1\mathrm{e}^{-x} + (x+3) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-2$.
Donc $-x-2 > 0 \iff -2 > x \iff x < -2$ entraîne que $f'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;\,-2[$.
On montre de même que f est décroissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

4. Avec $f(-2) = \mathrm{e}^2$ qui est un maximum, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f			e^2		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

5. On a $f(-1) = 2\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$.
Le coefficient directeur de la tangente en ce point $(-1\,;\,2\mathrm{e})$ est égal à $f'(-1) = -1\mathrm{e}^1 = -\mathrm{e}$.
L'équation de la tangente T est :
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ soit $y - 2\mathrm{e} = -\mathrm{e}(x+1) \iff y = 2\mathrm{e} - \mathrm{e}x - \mathrm{e}- \iff$
$y = -\mathrm{e}x + \mathrm{e} \iff y = \mathrm{e}(1-x)$.

Partie B : Étude de la position de T par rapport à Γ

1. $g(-1) = 2\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}(1+1) = 0$.

2. Étant admis que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que $g(x) < 0$ si $x < -1$ c'est-à-dire que $(x+3)\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}(1-x)$ soit géométriquement que Γ est au dessous de T.
De même on en déduit que Γ est au dessus de T si $x > -1$.

3. Voir l'annexe.

Partie C : Calcul d'aire

1. **a.** F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'(x) = f(x)$.
Or $F'(x) = a\mathrm{e}^{-x} - (ax+b)\mathrm{e}^{-x} = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc $F'(x) = f(x)$ si $(-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x} = (x+3)\mathrm{e}^{-x}$ ou en simplifiant par $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ quel que soit le réel x,
$-ax+a-b = x+3$ soit en identifiant ces deux fonctions affines : $a = -1$ et $b = -4$.

b. Comme $F(x) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f et qu'une primitive de $\mathrm{e}(1-x)$ est $\mathrm{e}\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$, on déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est la fonction G définie par :
$G(x) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}\dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}x$.

2. **a.** Voir la figure.

b. On a vu que pour $x > -1$, Γ est au dessus de T. Donc, l'aire de la partie du domaine hachurée comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est donnée par :

$$\int_0^1 g(x)dx = G(1) - G(0) = -5e^{-1} + e \times \frac{1}{2} - e - (-4+0) = -\frac{5}{e} - \frac{e}{2} + 4$$

De plus, $f(x) > 0$ pour $x > 1$ donc l'aire de la partie hachurée comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est donnée par :

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = (-2e^{-2} - 4e^{-2}) - (- \times e^{-1-4e^{-1}}) = -6e^{-2} + \frac{5}{e}$$

Finalement, obtient :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -\frac{5}{e} - \frac{e}{2} + 4 - 6e^{-2} + \frac{5}{e} = 4 - \frac{e}{2} - 6e^{-2}$$

D'après les unités des axes, une unités d'aire a une aire de $1 \times 2 = 2cm^2$. Ainsi, l'aire hachurée mesurée en cm^2 est de :

$$2(4 - \frac{e}{2} - 6e^{-2}) \cong 3.66$$

ANNEXE à rendre avec la copie