Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie 14 juin 2011
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

Dans un restaurant, chaque client peut composer son menu en choisissant une seule entrée, un seul plat et un seul dessert parmi ceux proposés dans la carte ci-dessous :

Entrées
Crudités (3 euros)
Salade du chef (7 euros)
Plats
Plat du jour (8 euros)
Rôti de bœuf (10 euros)
Filet de daurade (10 euros)
Desserts
Glace (2 euros)
Tartelette aux pommes (6 euros)

Dans la suite du problème, on suppose qu'un client compose son menu au hasard et on admet que tous les choix possibles sont équiprobables.

1. Combien de menus (entrée + plat + dessert) différents peut composer le client ? On représentera ces différentes possibilités à l'aide d'un arbre.

2. Quelle est la probabilité que le menu composé comporte les crudités en entrée et une glace en dessert ?

3. Quelle est la probabilité que ce client paye 19 euros ?

4. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque menu, associe son prix en euros.

a. Quelles sont les six valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X (arrondir à 10^{-2} près).

EXERCICE 2 **5,5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$\left(z-\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+4\right)=0$$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_\text{A}=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_\text{B}=-\sqrt{3}+\text{i}$.

a. Déterminer la forme algébrique de z_A.

b. Déterminer la forme exponentielle de z_B.

c. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

d. Montrer que B est l'image de A par une rotation de centre O dont on déterminera l'angle.

3. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

a. Placer le point D sur la figure et prouver que OADB est un losange.

b. Prouver que OADB n'est pas un carré.

PROBLÈME **10 points**

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A

Partie A

On considère l'équation différentielle notée

$$(E_1)\ :\quad y'-2y=\frac{9}{2}\text{e}^{x}-4,$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle notée $(E) : y'-2y=0$.

2. On pose, pour tout réel x, $f(x)=y(x)-\frac{9}{2}\text{e}^{x}+2$, où y est solution de l'équation (E).

a. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)-2f(x)$. En déduire que la fonction f est solution de l'équation (E_1).

b. Parmi les fonctions f précédentes, déterminer celle qui vérifie $f\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]=0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\text{e}^{2x}-\frac{9}{2}\text{e}^{x}+2$$

Sur le graphique donné en annexe, on a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 centimètres.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote Δ dont on précisera une équation.

Tracer la droite Δ sur le graphique donné en annexe.

3. Justifier que, pour tout réel x, $f(x)=(\text{e}^{x}-4)\left(\text{e}^{x}-\frac{1}{2}\right)$.

4. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie C

1. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=2\text{e}^{x}\left(\text{e}^{x}-\frac{9}{4}\right)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau complet des variations de la fonction f (on calculera en particulier la valeur exacte de l'extremum).

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis tracer cette tangente T sur le graphique donné en annexe.

4. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ se coupent en un point A.

a. Par simple lecture graphique, déterminer une valeur approchée de l'abscisse x_{A} de ce point.

b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=2$. En déduire la valeur exacte de x_{A}.

c. Par lecture graphique, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Annexe : à rendre avec la copie