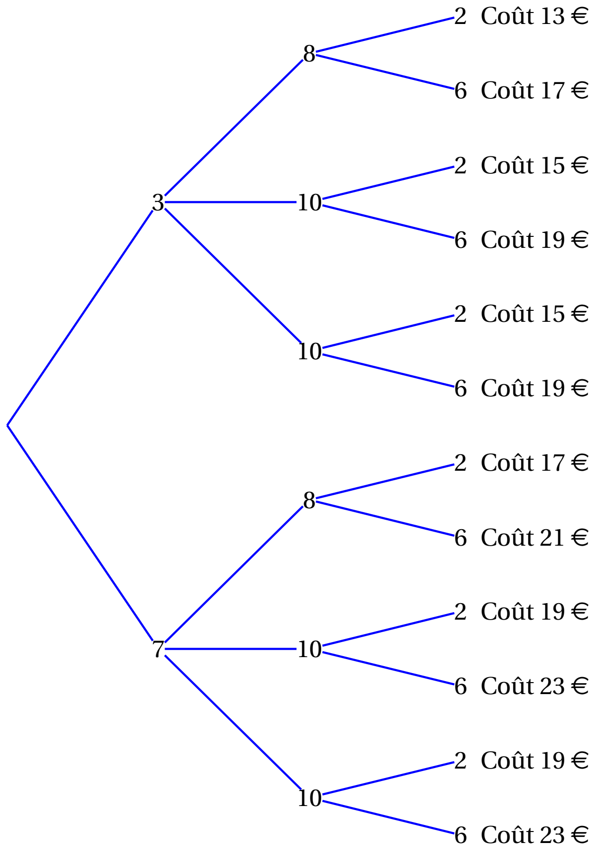
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie 14 juin 2011 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

1.



Il y a donc $2 \times 3 \times 2 = 12$ menus différents.

2. L'entrée et le dessert étant fixés, on peut choisir entre trois plats. Il y a donc trois menus. La probabilité est $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

3. Il y a 4 menus qui coûtent 19 euros. La probabilité est donc $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

4. a. $X \in \{13\,;\,;\,15\,;17\,;\,19\,;\,21\,;\,23\}$.

b.

X	13	15	17	19	21	23
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

c. On a $\mathrm{E}(X) = 13 \times \dfrac{1}{12} + 15 \times \dfrac{2}{12} + 17 \times \dfrac{2}{12} + 19 \times \dfrac{4}{12} + 21 \times \dfrac{1}{12} + 23 \times \dfrac{2}{12} = \dfrac{13 + 30 + 34 + 76 + 21 + 46}{12} = \dfrac{220}{12} = \dfrac{55}{3} \approx 18,33$ €.

EXERCICE 2 **5,5 points**

1. $\left(z-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+4\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 0\\ z^2+2z\sqrt{3}+4 & = & 0\end{array}\right.$

   La première équation a pour solution $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$.
   Pour l'équation du second degré : $\Delta = 12-16=-4=(2\mathrm{i})^2<0$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $\dfrac{-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{2}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   $S=\{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{3}-\mathrm{i}\ ;\ -\sqrt{3}+\mathrm{i}\}$.

2. **a.** $z_{\text{A}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$.

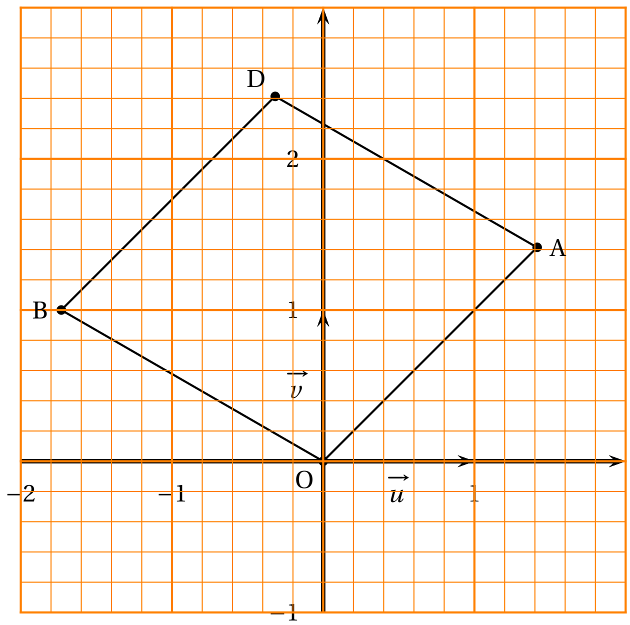
   b. $z_{\text{B}}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

   c. Voir à la fin

   d. $|z_{\text{A}}|=|z_{\text{B}}|=2$, donc OA = OB.
   D'autre part $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)=\arg(z_{\text{B}})-\arg(z_{\text{A}})=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{10\pi+3\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}$.

3. **a.** On a $z_{\overrightarrow{\text{BD}}}=z_{\text{D}}-z_{\text{B}}=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}-\mathrm{i}=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=z_{\overrightarrow{\text{OA}}}$.
   On a donc $\overrightarrow{\text{OA}}=\overrightarrow{\text{BD}} \iff$ OADB est un parallélogramme.
   On a vu que OA = OB, donc OADB parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

   b. On a $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)=\arg(z_{\text{B}})-\arg(z_{\text{A}})=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{10\pi-3\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}\neq\dfrac{\pi}{2}$. Donc OADB n'est pas un carré.



PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. $y'-2y=0 \iff y'=2y$: on sait que les solutions de cette équation sont les fonctions $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$, C étant un réel quelconque.

2. **a.** On a $f'(x)-2f(x) = y'(x) - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x - 2\left(y(x) - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2\right) =$

$y'(x) - 2y(x) - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2\times\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x - 4.$

Or y étant solution de (E), on a $y'(x)-2y(x) = 0$, donc :

$f'(x) - 2f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x - 4.$

Cette égalité signifie que la fonction f est une solution de (E_1).

b. Les fonctions f sont donc de la forme :

$f(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Donc $f\left[\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] = 0 \iff C\mathrm{e}^{2\times\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 2 = 0 \iff C\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 2 = 0 \iff C\times\dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{2} + 2 = 0 \iff \dfrac{C}{4} = \dfrac{9}{4} - 2 \iff C = 9-8 = 1.$

Conclusion $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2.$

Partie B

1. On a $\mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^x\right)^2$. Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ et par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$

2. Géométriquement le résultat précédent signifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini. Voir la figure à la fin.

3. Quel que soit le réel x, $\left(\mathrm{e}^x - 4\right)\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x + 4\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x + 4 = f(x).$

4. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 4 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2} = +\infty$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

Partie C

1. f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{9}{4}\right).$

2. On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - \dfrac{9}{4}$.

Or $\mathrm{e}^x - \dfrac{9}{4} > 0 \iff \mathrm{e}^x > \dfrac{9}{4} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $x > \ln\frac{9}{4}$.

Donc f est croissante sur $\left[\ln\frac{9}{4}~;~+\infty\right[$.

De même f est décroissante sur $\left]-\infty~;~\ln\frac{9}{4}\right]$.

Conclusion $f\left(\ln\frac{9}{4}\right) = \mathrm{e}^{2\ln\frac{9}{4}} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{\ln\frac{9}{4}} + 2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{9}{2}\times\frac{9}{4} + 2 = \frac{81}{16} - \frac{81}{8} + 2 = -\frac{49}{16} = -3{,}0625.$

3. La droite T a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(0) = 2 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Une équation de T est donc $y = -\dfrac{5}{2}x + b$. Le point de cordonnées $\left(0~;~1 - \frac{9}{2} + 2\right) = \left(0~;~-\frac{3}{2}\right)$ appartient à T soit $-\frac{3}{2} = b$.

Une équation de T est donc $y = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}$.

4. **a.** L'abscisse approximative de A est 1,5.

b. $f(x) = 2 \iff e^{2x} - \dfrac{9}{2}e^{x} + 2 = 2 \iff e^{2x} - \dfrac{9}{2}e^{x} = 0 \iff e^{x}\left(e^{x} - \dfrac{9}{2}\right) = 0 \iff e^{x} - \dfrac{9}{2} = 0$ (car $e^{x} \neq 0$) $e^{x} = \dfrac{9}{2} \iff x = \ln\frac{9}{2}$. (La calculatrice donne $\ln\frac{9}{2} \approx 1{,}504\,08$; l'approximation graphique est bonne)

c. Sur $\left]-\infty\,;\,\ln\frac{9}{2}\right[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de (Δ) ;
Sur $\left]\ln\frac{9}{2}\,;\,+\infty\right[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (Δ).

Annexe : à rendre avec la copie