Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI La Réunion juin 2011 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Puisque $z_A = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors $z_A \times z_B = 3\sqrt{3}e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 3\sqrt{3}e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$.
2. L'image du point C(2 ; 4) par la rotation r est le point C$'$ tel que : $z_{C'} - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(2+4i-0) \iff z_{C'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2+4i) = \sqrt{2}-2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$. Réponse **c.**
3. $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2-i}{4+1} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - i\dfrac{1}{5}$. Réponse **b.**
4. On reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{3}$, donc $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z^{2011} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2011} = e^{i\frac{2011\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ car $\frac{2011\pi}{3} = \frac{2010\pi}{3} + \frac{1\pi}{3} = 670\pi + \frac{1\pi}{3} = 335 \times 2\pi + \frac{1\pi}{3}$. Réponse **b.**
5. Réponse **c.**

EXERCICE 2 **5 points**

1. Voir à la fin.
2. **a.** La probabilité est égale à $\dfrac{324}{1\,200} = \dfrac{27}{100} = 0,27$.

   b. La probabilité est égale à $\dfrac{6}{1\,200} = \dfrac{1}{200} = 0,005$.
3. **a.** On a $X \in \{-5\,;\,-2\,;\,-1\,;\,2\,;\,5\}$.

   b. On a $p(X=-5) = \dfrac{576}{1\,200}$, $p(X=-2) = \dfrac{144}{1\,200}$, $p(X=-1) = \dfrac{324}{1\,200}$, $p(X=2) = \dfrac{36+114}{1\,200} = \dfrac{150}{1\,200}$, $p(X=5) = \dfrac{6}{1\,200}$. D'où le tableau suivant :

$X = \ldots$	-5	-2	-1	2	5
$p(X=x_i)$	$\dfrac{576}{1\,200}$	$\dfrac{144}{1\,200}$	$\dfrac{324}{1\,200}$	$\dfrac{150}{1\,200}$	$\dfrac{6}{1\,200}$

   c. On a $E(X) = -5 \times \dfrac{576}{1\,200} - 2 \times \dfrac{144}{1\,200} - 1 \times \dfrac{324}{1\,200} + 2 \times \dfrac{150}{1\,200} + 5 \times \dfrac{6}{1\,200} = \dfrac{-2\,880-288-324+300+30}{1\,200} = \dfrac{3\,162}{1\,200} = 2,635$.
4. Sur un grand nombre de parties un joueur perdra à chaque partie en moyenne à peu près 2,64 €.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Le maximum de la fonction vaut à peu près $-1,3$: la fonction est donc négative sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
2. On a $f'x) = \dfrac{1}{x} + a$

3. On a $f'(2) = 0 \iff \dfrac{1}{2} + a = 0 \iff a = -\dfrac{1}{2}$.
De plus $f(2) = -2 + \ln 2 \iff \ln 2 - \dfrac{1}{2} \times 2 + b = -2 + \ln 2 \iff -1 + b = -2 \iff$ $b = -1$.
Conclusion : sur $[0\,;\,10]$, $\quad f(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} - 1$.

Partie B

1. **a.** On a $g(x) = \ln x(\ln x - 2) - x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \ln x - 2 = -\infty$ et par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} \ln x(\ln x - 2) = +\infty$, donc finalement $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
   b. Le résultat précédent signifie géométriquement que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.
2. **a.** g est dérivable sur $]0\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} - 1 - 2 \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{x}\left(\ln x - \dfrac{x}{2} - 1\right) = \dfrac{2}{x}f(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$.
   b. Comme $\dfrac{2}{x} > 0$ sur $]0\,;\,10]$, le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$ qui est négatif d'après la question 1 de la partie A. Or $g'(x) < 0$ signifie que g est décroissante sur $]0\,;\,10]$.
3. La tangente T contient le point de cordonnées $(1\,;\,g(1)) = (1\,;\,-1)$.
   Le coefficient directeur de T est égal à $g'(1) = -3$.
   Une équation réduite de T est donc $y = -3x + b$ et comme le point $(1\,;\,-12)$ appartient à T, on a $-1 = -3 + b \iff b = 2$.
   Une équation de T est donc $y = -3x + 2$.
4. **a.** La fonction g est dérivable sur $[0{,}1\,;\,10]$ et strictement croissante ; comme $f(0{,}1) \approx 9{,}8$ et $f(10) \approx -9{,}3$, il existe un réel unique $\alpha \in [0{,}1\,;\,10]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. La calculatrice donne $0{,}72 < \alpha < 0{,}73$.

Partie C

1. G est dérivable sur $]0\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
   $G'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} - 4\ln x - 4x \times \dfrac{1}{x} + 4 - \dfrac{1}{2} \times 2x = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} - 4\ln x - 4x \times \dfrac{1}{x} + 4 - \dfrac{1}{2} \times 2x = \ln x)^2 + 2\ln x - 4\ln x - 4 + 4 - x = (\ln x)^2 - 2\ln x - x = g(x)$.
   Conclusion G est une primitive de g sur $]0\,;\,10]$.
2. Voir à la fin
3. La courbe $\mathscr{C}$ étant située au dessus de T, l'aire (en unité d'aire de la surface Δ est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [g(x) - (2 - 3x)\,\mathrm{d}x = \left[G(x) - 2x + \frac{3}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}}{}_1^{\mathrm{e}} =$
   $\mathrm{e}(\ln \mathrm{e})^2 - 4\mathrm{e}\ln \mathrm{e} + 4\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^2 - \left[1(\ln 1)^2 - 4\ln 1 + 4 - \dfrac{1}{2} - 2 + \dfrac{3}{2}\right] =$
   $\mathrm{e} - 4\mathrm{e} + 4\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^2 - 4 + \dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{3}{2} =$
   $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 3$ (u. a.) $\approx 1{,}7$ (u. a.)

ANNEXE 1 à rendre avec la copie

Joueurs ayant validé :	le niveau 1 uniquement	les niveaux 1 et 2	les trois niveaux	Total
avec bonus	144	36	6	186
sans bonus	576	324	114	1 114
Total	720	360	120	1 200

ANNEXE 2 à rendre avec la copie