Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾ Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 6z + 10 = 0.$$

2. Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 46z - 60.$$

   a. Calculer $P(6)$.

   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, on ait $P(z) = (z-6)\left(az^2 + bz + c\right)$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm ; soient A, B et C les points de ce plan d'affixes respectives $3+\text{i}$, $3-\text{i}$ et 6.
   Placer les points A, B et C.
4. Démontrer que le quadrilatère OACB est un parallélogramme.
5. Comparer les longueurs OA et OB. En déduire la nature du parallélogramme OACB.

EXERCICE 2 **6 points**

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience. En déduire les valeurs possibles de la somme S.
2. Soit A l'évènement : « la somme S est égale à 1,5 » et B l'évènement : « la somme S est égale à 1 ».

   a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,4$.

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

3. Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie I, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **10 points**

Les parties II *et* III *peuvent être traitées indépendamment de la partie* I.

Partie I

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \mathrm{e}^x$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.
   a. Soit a un nombre réel et u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = a\mathrm{e}^x$.
   Déterminer a pour que la fonction u soit une solution de l'équation différentielle (E).
   b. Soit b un nombre réel. On admet que la fonction w définie pour tout réel x par $w(x) = b\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer b pour que la fonction w vérifie $w(0) = 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x.$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On remarquera que, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.
   b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie III

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. On considère la partie $\mathscr{D}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.
   a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$ sur le graphique.
   b. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$. On exprimera le résultat en centimètres carrés.