Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie électronique Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

1. On a $\Delta = 36 - 40 = -4 = (2\text{i})^2$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{6+2\text{i}}{2} = 3+\text{i} \quad \text{et} \quad 3-\text{i}.$$

Ou bien : $z^2-6z+10 = 0 \iff (z-3)-9+10 = 0 \iff (z-3)^2+1 = 0 \iff (z-3)^2-\text{i}^2 = 0 \iff (z-3-\text{i})(z-3+\text{i})$ et l'on retrouve les deux solutions.

2. **a.** $P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 46 \times 6 - 60 = 216 - 432 + 276 - 60 = 492 - 492 = 0$. On peut donc factoriser $P(z)$ par $z-6)$.

b. $P(z) = (z-6)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3-12z^2+46z-60 = (z-6)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3-12z^2+46z-60 = az^3+bz^2+cz-6az^2-6bz-6c \iff z^3-12z^2+46z-60 = az^3+(b-6a)z^2+(c-6b)z-6c \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b-6a &=& -12\\ c-6b &=& 46\\ -6c &=& -60\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b &=& -6\\ c &=& 10\\ c &=& 10\end{array}\right.$

On a donc

$$P(z) = z^3-12z^2+46z-60 = (z-6)\left(z^2-6z+10\right).$$

c. $P(z) = 0 \iff (z-6)\left(z^2-6z+10\right) = 0$. Les solutions sont donc $z = 6$ et les solutions de l'équation de la question 1.

$$S = \{6 \quad ; \quad 3+\text{i} \quad ; \quad 3-\text{i}\}$$

3. Voir plus bas

4. Le milieu de [OC] a pour coordonnées (3 ; 0) ;

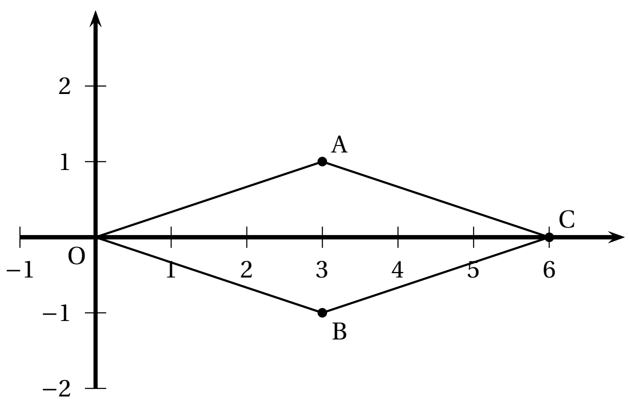
Celui de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{3+3}{2}\ ;\ \dfrac{1-1}{2}\right) = (3\ ;\ 0)$.

[OC] et [AB] ont le même milieu : le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

5. $\text{OA} = |3+\text{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$;

$\text{OB} = |3-\text{i}| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.

Le quadrilatère OACB a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.



EXERCICE 2 **6 points**

Partie I

1. On construit le tableau à double-entrée suivant :

1^er^jeton \ 2^e^ jeton	2	1	1	0,5	0,5
2		3	3	2,5	2,5
1	3		2	1,5	1,5
1	3	2		1,5	1,5
0,5	2,5	1,5	1,5		1
0,5	2,5	1,5	1,5	1	

On peut donc obtenir :
1 ; 1,50 ; 2 ; 2,50 ; 3

2. **a.** $p(\text{A}) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5} = 0,4.$

   b. $p(\text{B}) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$

3. On a $P(S \geqslant 2) = 1 - \left[p(\text{A}) + p(\text{B})\right] = 1 - 0,5 = 0,5.$

Partie II

1. C'est la probabilité de tirer 1,50 €, soit la probabilité de A soit 0,4.

2.

x_i	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

3. On a $\text{E}(X) = 2 \times 0,1 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,2 + 6 \times 0,2 = 0,2 + 1,2 + 0,4 + 1 + 1,2 = 4.$
En moyenne sur un grand nombre de tirages on pourra stationner pendant 4 heures.

PROBLÈME **10 points**

Partie I

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :
$y = C\text{e}^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$

2. **a.** On a $u'(x) = a\text{e}^x$.
u est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si
$a\text{e}^x - 2a\text{e}^x = \text{e}^x \iff -a\text{e}^x = \text{e}^x \iff a = -1.$
La fonction $-\text{e}^x$ est donc solution de (E).

   b. $w(x) = b\text{e}^{2x} - \text{e}^x$, donc $w(0) = b - 1 = 0 \iff b = 1$.
Conclusion : la fonction $\text{e}^{2x} - \text{e}^x$ est la solution de (E) qui vérifie $w(0) = 0$.

Partie II

1. Comme $\text{e}^{2x} - \text{e}^x = \text{e}^x(\text{e}^x - 1)$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$, on peut en déduire que
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
En moins l'infini : comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Géométriquement ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

a. f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $2\mathrm{e}^{x} - 1$.
Or $2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} > 1 \iff \mathrm{e}^{x} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x > -\ln 2$.
De même $2\mathrm{e}^{x} - 1 < 0$ entraîne $x < -\ln 2$.

b. $f(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 1(x) \iff y = x$.

3. Voir plus bas.

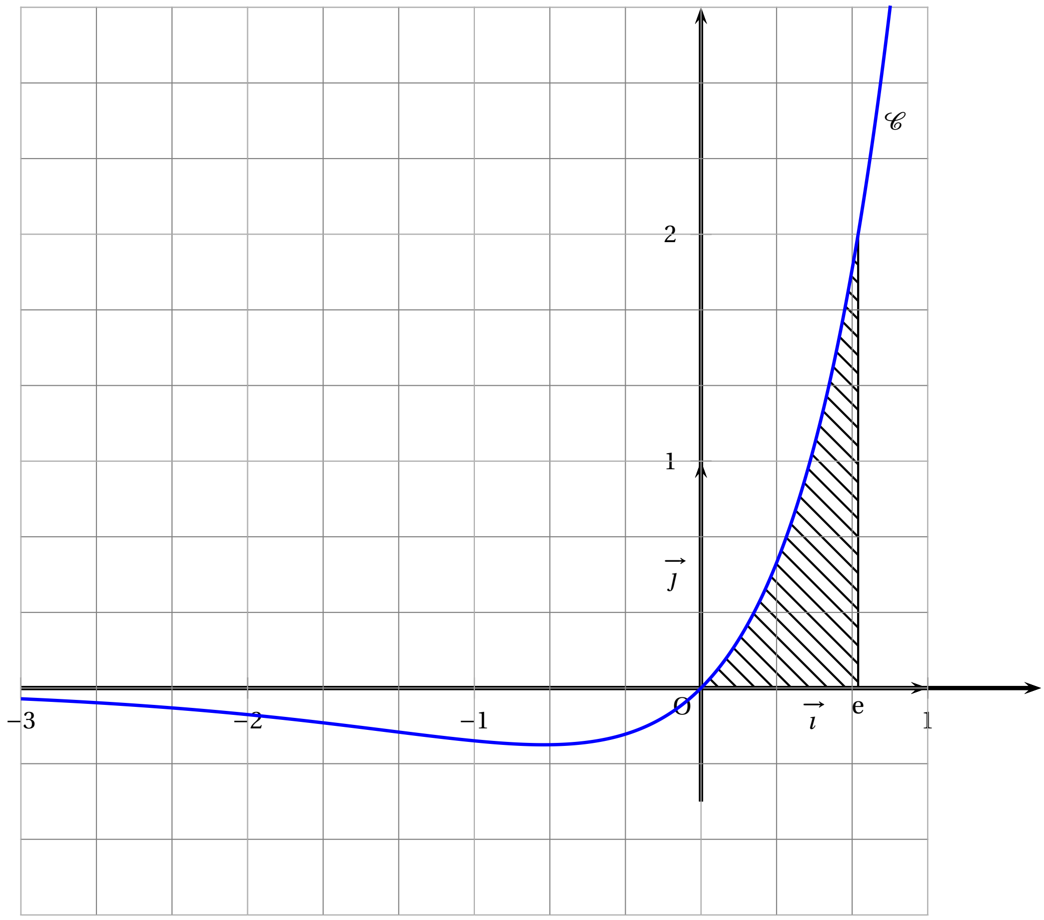
Partie III

1. Sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, $f(x) \leqslant 0$.
Sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, la fonction f est croissante : elle s'annule donc pour une valeur unique 0, car $f(0) = \mathrm{e}^{2\times 0} - \mathrm{e}^{0} = 1 - 1 = 0$.
Conclusion : sur $]-\infty\,;\,0[$, $f(x) < 0$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ $f(x) > 0$.

2. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times(\ln 2)} - \mathrm{e}^{\ln 2} - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} - \mathrm{e}^{0}\right) =$
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times(\ln 2)} - \mathrm{e}^{\ln 2} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} \times 4 - 2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

3. a. Voir plus bas.

b. On a vu que pour $x > 0$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la partie $\mathcal{D}$ est, en unité d'aire égale à l'intégrale I, soit $\dfrac{1}{2}$ (u. a.)
Or l'unité d'aire est égale à $3 \times 3 = 9$ cm^2.
Donc l'aire est égale à $9 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$ cm^2.



$\mathscr{C}$
2
1
$\vec{\jmath}$
O
$\vec{\imath}$
e
-3
-2
-1
1