Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie
Génie électronique, électrotechnique et optique
novembre 2011

EXERCICE 1 **4,5 points**

Dans une urne, on dispose de cinq boules indiscernables au toucher : trois boules vertes numérotées de 1 à 3, qu'on notera V_1, V_2 et V_3, et deux boules rouges numérotées 0 et 5, qu'on notera R_0 et R_5.
Un jeu consiste à tirer successivement deux boules au hasard. Avant de tirer la deuxième boule, on remet dans l'urne la boule obtenue au premier tirage.

— Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur ne reçoit rien.

— Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le joueur remporte le montant en euros égal au nombre formé en prenant le chiffre de la boule verte pour les dizaines et celui de la boule rouge pour les unités.

Par exemple, le tirage du couple $(R_5 ; V_3)$ rapporte 35 euros, alors que le tirage du couple $(V_1 ; V_2)$ ne rapporte rien.

1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant les différents montants :

2^e^ boule / 1^re^ boule	V_1	V_2	V_3	R_0	R_5
V_1		0			
V_2					
V_3					
R_0					
R_5			35		

   b. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « le joueur ne reçoit rien » ;
   B : « le joueur remporte un montant supérieur ou égal à 20 euros ».

2. On suppose dans cette question que le joueur mise 15 euros. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise, X étant négative en cas de perte.

   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Calculer l'espérance de X.

   c. Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance du gain est nulle. Quelle devrait être la mise de départ pour que ce jeu soit équitable ?

EXERCICE 2 **5,5 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + 5z^2 + 10z + 12.$$

   a. Calculer $P(-3)$, puis déterminer les réels b et c tels que
   $P(z) = (z+3)\left(z^2 + bz + c\right)$.

   b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -3 \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

a. Sur la figure donnée en annexe, on a tracé deux triangles. L'un est le triangle ABC, l'autre sera noté T. Placer les points A, B et C sur cette figure.

b. On considère la translation t de vecteur $4\vec{u}$. Construire les points A$'$, B$'$ et C$'$, images respectives des points A, B et C par la translation t.

c. On admet que le triangle T est l'image du triangle A$'$B$'$C$'$ par une rotation r de centre O. Quel est l'angle de cette rotation ? (aucune justification n' est demandée).

d. On appelle S le sommet du triangle T ayant une abscisse strictement négative.

Placer le point S sur la figure donnée en annexe. Quelle conjecture peut-on faire concernant les points O, B et S ?

3. a. Calculer l'affixe $z_{\text{B}'}$ du point B$'$ puis écrire $z_{\text{B}'}$ sous forme exponentielle.

b. On admet que le point S est l'image du point B$'$ par la rotation r. En déduire l'écriture exponentielle de l'affixe z_{S} du point S.

c. Écrire z_{B} sous forme exponentielle. Démontrer alors la conjecture faite à la question 2. d.

PROBLÈME **10 points**

Dans tout le problème, on note I l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par I $=]0\ ;\ +\infty[$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par

$$g(x) = x^2 - 2\ln x + 2.$$

1. Pour tout réel x de l'intervalle I, déterminer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle I.

2. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle I (les limites ne sont pas demandées).

3. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x - 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe $\mathscr{C}$, notée D, dont on précisera une équation.

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c. Préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle I.
4. **a.** Calculer les images de 1 et de 2 par la fonction f.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $[1~;~2]$.
   c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
5. Établir une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Tracer les droites D, Δ et T puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par

$$h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Calculer $h'(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[1 - (\ln 2)^2\right]$.
3. On considère l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote Δ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déduire de la question précédente une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en centimètres carrés à 10^{-2} près.

Annexe : à rendre avec la copie