Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2007
Génie électronique, électrotechnique, optique
Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **5 points**

1. $|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. On peut donc écrire

   $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. **a.** $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. On a donc $z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. **a.** Comme $z_1 = z_2 \times z_3 = (1-\mathrm{i})\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) =$

   $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

   b. On a donc pour z_1 trois écritures :

   $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, d'où par identification des parties réelles et imaginaires :

   $$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

4. **a.** Voir la figure plus bas.

   b. I et B ont la même abscisse : le triangle est donc rectangle en I ;
   On a OI = IB = 1 : le triangle est donc isocèle en I

5. **a.** L'écriture complexe de la rotation R est : $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   Donc $z_{\mathrm{I}'} = z_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = z_3$. L'image de I est donc le point C.

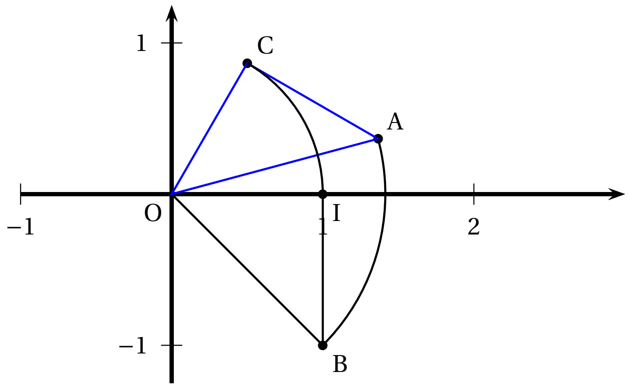
   De même $z_{\mathrm{B}'} = z_{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = (1-\mathrm{i})\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) =$

   $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = z_1$. L'image de B est donc le point A.

   On peut aussi démontrer géométriquement que OI = OC = 1 et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et donc que C est l'image du point I par la rotation R.

   De même OB = OA = $\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}$ et donc que A est l'image de B par la rotation R.

   b. Le point O est invariant par la rotation R ; l'image du triangle OIB par la rotation R est le triangle OCA. Comme le triangle OIB est rectangle isocèle en I, son image par R est lui aussi rectangle isocèle C image de I et superposable à OIB.



EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

1. **a.** X peut prendre les valeurs : 7 1 −2 −3.

   b.

x_i	7	1	−2	−3
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	3/6

   c. Calculer l'espérance mathématique E(X). $E(X) = 7 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + (-3) \times \frac{3}{6} = \frac{7+1-2-9}{6} = -\frac{1}{2} = -0,50$ (€).

   d. La question précédente montre que le gain moyen par partie (pour les organisateurs) est de 50 centimes. Donc pour 150 joueurs, le gain espéré sera de $150 \times 0,50 = 75$ €.

2. Il faut qu'après la fin de la première partie le joueur ait au moins 3 €, ce qui est le cas si le 6 ou le 5 sont sortis au premier tour, ce qui correspond à une probabilité de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Partie B

Le tableau de la loi de probabilité devient :

x_i	$10 - x$	$4 - x$	$1 - x$	$-x$
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	3/6

Le jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle donc si :
$(10 - x) \times \frac{1}{6} + (4 - x) \times \frac{1}{6} + (1 - x) \times \frac{1}{6} + (-x) \times \frac{3}{6} = 0 \iff \frac{10+4+1-x-x-x-3x}{6} = 0 \iff 15 - 6x = 0 \iff 15 = 6x \iff 5 = 2x \iff x = 2,50$.
Le jeu est équitable si la mise est égale à 2,50 €.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (2x - 2) = e^{-x}$; on a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

2. **a.** On a $f(x) = e^{-x} + 2x - 2 = e^{-x} \times 1 + 2xe^{-x}e^{x} - 2e^{-x}e^{x} = e^{-x}\left(1 + 2xe^{x} - 2e^{x}\right)$.

   b. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2xe^{x} - 2e^{x} = 1$.
   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, on obtient par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$.
   On a $-\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{-x}$ d'où d'après la croissance de la fonction ln, $\ln 2 > -x \iff x > -\ln 2$.
   On obtient de même que $-\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff x < -\ln 2$.
   $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$;
   $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.

   b. Le minimum de la fonction est égal à $f(-\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} + 2 \times (-\ln 2)2 = 2 - 2\ln 2 - 2 = -2\ln 2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction f est croissante, $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} + 2 - 2 = \mathrm{e}^{-1} > 0$; il existe donc un unique réelle $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne $f(0,7) \approx -0,10$ et $f(0,8) \approx 0,05$, donc $\alpha \in]0,7\,;\,0,8[$.
   $f(0,76) \approx -0,012$ et $f(0,77) \approx 0,003$, donc $\alpha \in]0,76\,;\,0,77[$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :
5. **a.** On a $f(-\ln 3) = \mathrm{e}^{\ln 3} + 2 \times (-\ln 3) - 2 = 3 - 2\ln 3 - 2 = 1 - 2\ln 3$.

   b. Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $-\ln 3$ est égal au nombre dérivé $f'(-\ln 3)$.
   Or on a vu que $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$, donc $f'(-\ln 3) = -\mathrm{e}^{\ln 3} + 2 = 2 - 3 = -1$.
6. Voir plus bas.

Partie B

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2x - 2 = f(x)$.
2. Voir la figure.
   On a vu que $f(1) > 0$ et que sur $[1\,;\,3]$ la fonction f est croissante : donc l'aire du domaine $(\mathscr{E})$ en unités d'aire est égale à l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1)$$

   Or $F(3) - F(1) = -\mathrm{e}^{-3} + 3^2 - 2 \times 3 - \left(-\mathrm{e}^{-1} + 1^2 - 2 \times 1\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-3} + 9 - 6 - 1 + 2 = 4 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-3}$ (u. a.).
   On obtient $\mathscr{A} \approx 4,32$ (u. a.)
3. On sait que $\mu = \dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathscr{A} = 2 + \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-3}\right)$.
   Cette valeur est la longueur du rectangle de largeur 2 qui a la même aire que $\mathscr{E}$ (voir la figure).

Annexe à rendre avec la copie