Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾
Génie électrotechnique, optique
Métropole juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+4z+16=0$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-64$.

a. Calculer $P(4)$.

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z)=0$.

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=-2+2\text{i}\sqrt{3}$, $z_B=\overline{z_A}$ et $z_C=4$.

a. Établir que $z_A=4\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Écrire z_B sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, et on appelle z_D, l'affixe du point D.

a. Déterminer le module et un argument de z_D.

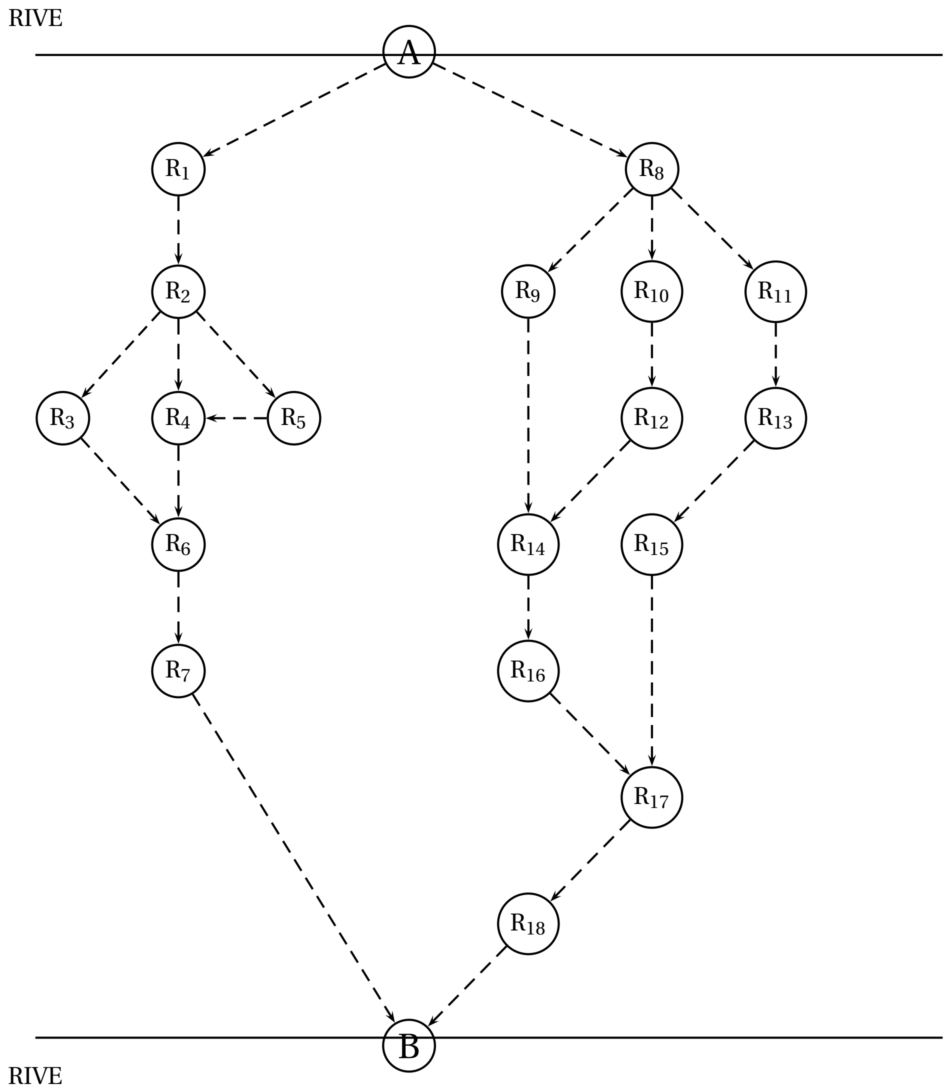
b. En déduire la forme algébrique de z_D.

c. Placer le point D sur le graphique précédent

EXERCICE 2 **4 points**

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.

Le torrent se présente de la manière suivante (les disques R_1, R_2, ..., R_{17}, R_{18}, représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.
Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.
Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?

b. Quelle est la probabilité p_2 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?

3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

Problème **10 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathcal{P}$.
On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B : détermination de l'expression de la fonction *f*

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : étude de la fonction *f*

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.

a. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

b. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

c. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie D : calcul d'aire

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan $\mathscr{P}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.

a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. a. Calculer $\mathscr{A}$.

b. Donner la valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au mm^2.