Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∽ génie électrotechnique, optique France septembre 2007

EXERCICE 1

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

2. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = 3 - \text{i}\sqrt{3}$.

   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

   b. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

3. On considère le point C, image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

   a. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   b. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{C} du point C.

   c. Démontrer que OC = BC,

   d. En déduire la nature du quadrilatère OABC.

4. On considère le point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Placer le point D dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   b. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{D} du point D.

   c. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze ayant deux côtés opposés de même longueur.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, les trois questions peuvent être traitées de manière indépendante.

On désigne par y une fonction de la variable réelle t, définie et 2 fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et par y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 0.$$

2. On désigne par (E) l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 8\sin t.$$

a. On désigne par A un nombre réel quelconque.
Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t.$$

est une solution de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer le nombre réel A tel que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t.$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME

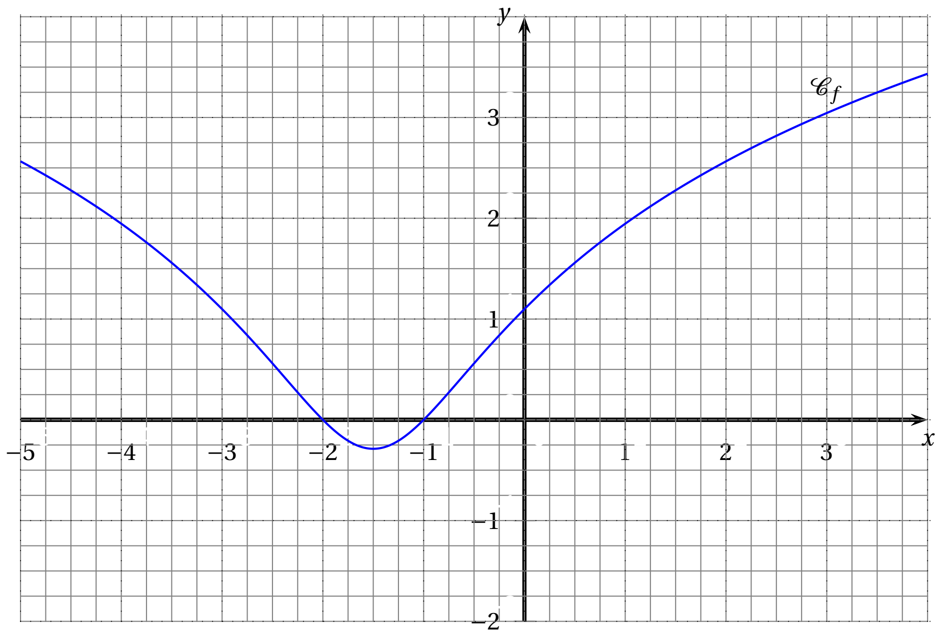
Ce problème a pour but d'étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A. Détermination d'une fonction *f*

On donne ci-dessous, dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On suppose que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A de coordonnées $(0\ ;\ \ln 3)$, B de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$ et C de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

1. On admet qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que, pour x réel, $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.
Calculer a, b et c.



(Ce graphique n'est pas à l'échelle.)

2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

b. Démontrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer la valeur exacte de ce minimum.

Partie B. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{10x+11}{x+2}\right).$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, du plan $\mathscr{P}$ et g' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$

1. **a.** Calculer $g(-1)$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2. **a.** En remarquant que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$:

$$g(x) = \ln(10x+11) - \ln(x+2),$$

justifier que :

$$g'(x) = \frac{9}{(10x+11)(x+2)}.$$

b. Établir le tableau de variations de la fonction g.

Partie C. Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. On pose, pour tout x réel, $P(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$.

a. Vérifier que, pour tout x réel, $P(x) = \left(x^2 - 1\right)(x+5)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

c. Étudier le signe de $P(x)$ pour tout x réel.

2. On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$ et que la fonction g est définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\dfrac{10x+11}{x+2}\right)$.

a. En utilisant les résultats de la question C. 1. b., résoudre dans l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$.

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.

3. **a.** En utilisant les résultats de la question C. 1. c, résoudre dans l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

b. En déduire selon les cas la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$;

4. Sur le graphique de la partie A, tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}_g$.