Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. $z^3-8=(z-2)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3-8=az^3+bz^2+cz-2az^2-2bz-2c \iff$

$$z^3-8=az^3+z^2(b-2a)+z(c-2b)-2c \iff \left\{\begin{array}{rcl}1&=&a\\0&=&b-2a\\0&=&c-2b\\-8&=&-2c\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&1\\0&=&b-2\\0&=&c-2b\\c&=&4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a&=&1\\b&=&2\\c&=&4\\c&=&4\end{array}\right.$$

On a donc $z^3-8=(z-2)\left(z^2+2z+4\right)$. Puis $z^3-8=0 \iff (z-2)\left(z^2+2z+4\right)=0$ qui a une première solution évidente 2.

Rest à résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+2z+4=0 \iff (z+1)^2-1+4=0 \iff (z+1)^2+3=0 \iff (z+1)^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=0 \iff \left(z+1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z+1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=0$ qui a deux solutions : $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Conclusion : $z^3-8=0$ si $z=2$ ou $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. **a.** Voir la figure plus bas

b. On a $\mathrm{AB}^2=(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$;

$\mathrm{AC}^2=(-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$;

$\mathrm{BC}^2=0^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2=12.^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2 \Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$: le triangle ABC est équilatéral.

3. **a.** $z_{\mathrm{A}}=2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$;

$z_{\mathrm{B}}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $|z_{\mathrm{B}}|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{B}}|=2$.

On peut écrire $z_{\mathrm{B}}=2\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

De même $|z_{\mathrm{C}}|=2$ (car z_{C} est le conjugué de z_{B}).

Donc $z_{\mathrm{C}}=2\left(-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-2\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Tout complexe z a pour image par la rotation R, le complexe z' tel que : $z'=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Donc $z_{\mathrm{A}'}=z_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Puis $z_{\mathrm{B}'}=z_{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

De même $z_{\mathrm{C}'}=z_{\mathrm{C}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\,\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}}$.

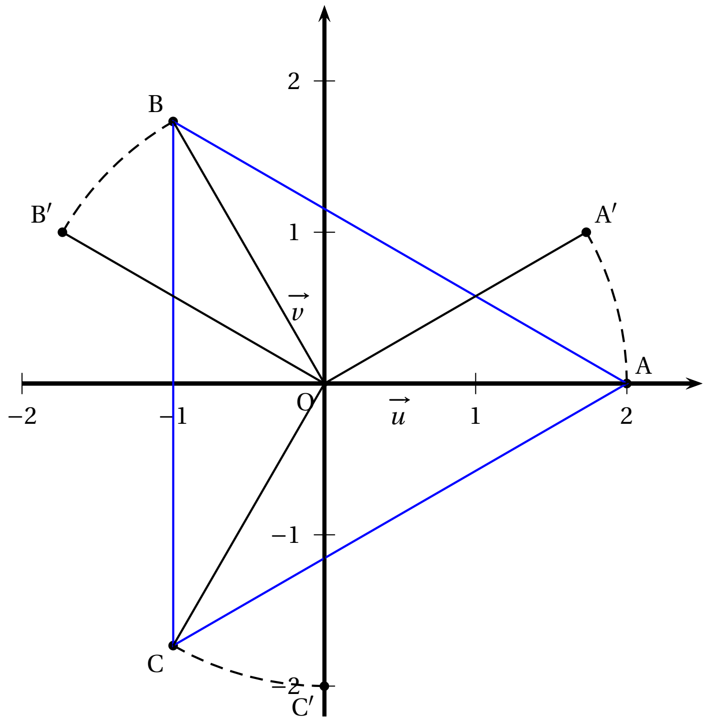
b. Voir la figure.

c. $\left(z_{\mathrm{A}'}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3=2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

$\left(z_{\mathrm{B}'}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^3=2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{6}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

$\left(z_{\mathrm{C}'}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}}\right)^3=2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{2}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

Conclusion : $z_{\mathrm{A}'}$, $z_{\mathrm{B}'}$, et $z_{\mathrm{C}'}$ sont solutions de l'équation $z^3=8\mathrm{i}$.



Exercice 2 **4 points**

Partie A

1. $u_1 = 230\,000 + 15\,000 = 245\,000$.
2. Puisque $u_{n+1} = u_n + 15000$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 230\,000$ et de raison $a = 15\,000$.
3. Le chiffre d'affaires en 2006 est égal à u_{16}.
   On sait que $u_n = u_0 + na = 230\,000 + 15\,000n$, donc $u_6 = 230\,000 + 15\,000 \times 16 = 230\,000 + 240\,000 = 470\,000$.

Partie B

1. On a $v_1 = 150\,000 \times 1,074 = 161\,100$.
2. On a donc $v_{n+1} = v_n \times 1,074$: la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,074$ et de premier terme $150\,000$.
3. On sait que $v_n = v_0 \times 1,074^n = 150\,000 \times 1,074^n$, donc $\mathrm{v}_{16} = 150\,000 \times 1,074^{16} \approx 470\,066,997 \approx 470\,067$ (€).

Partie C

1. On constate qu'en 2006, les chiffre d'affaires des deux entreprises sont à peu près les mêmes.
2. Il faut comparer u_{31} et v_{31}.
   $u_{31} = 230\,000 + 15\,000 \times 31 = 695\,000$.
   $v_{15} = 150\,000 \times 1,074^{31} \approx 1\,371\,588,96$.
   Le chef de l'entreprise B a raison.

Problème **11 points**

Partie A

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2+3x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$.
En plus l'infini :
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=\lim\limits_{x\to +\infty} 3x=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$.

2. g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x)=2x+3+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x(2x+3)}{x}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$.

3. Puisque $x>0$, tous les termes de cette dérivée sont positifs, donc $g'(x)>0$ et la fonction g est donc croissante sur $]0~;~+\infty[$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

4. $g(1)=1+3-4+0=0$. La fonction g est croissante et s'annule en 1. Donc :
si $x<1,\ g(x)<0$;
si $x>1,\ g(x)>0$.

Partie B

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4\ln(x)}{x}=0$, les autres termes ont pour limite plus l'infini, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

b. On peut écrire $f(x)=x+3\ln(x)-\dfrac{4\ln(x)}{x}=x+3\times\ln(x)-\ln(x)\times\dfrac{4}{x}=$
$x+\ln x\left(3-\dfrac{4}{x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to +0}=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{4}{x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

Géométriquement ceci montre que la droite d'équation $x=0$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de 0.

2. **a.** f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et :
$f'(x)=1+\dfrac{3}{x}-4\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=1+\dfrac{3}{x}-4\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. On a vu à la partie A question 4, le signe de $g(x)$ et comme $x^2>0$, on en déduit que :
si $x<1$, alors $f'(x)<0$: la fonction f est décroissante sur $]0~;~1[$;
si $x>1$, alors $f'(x)>0$: la fonction f est croissante sur $]1~;~+\infty[$

c. D'où le tableau de variations :

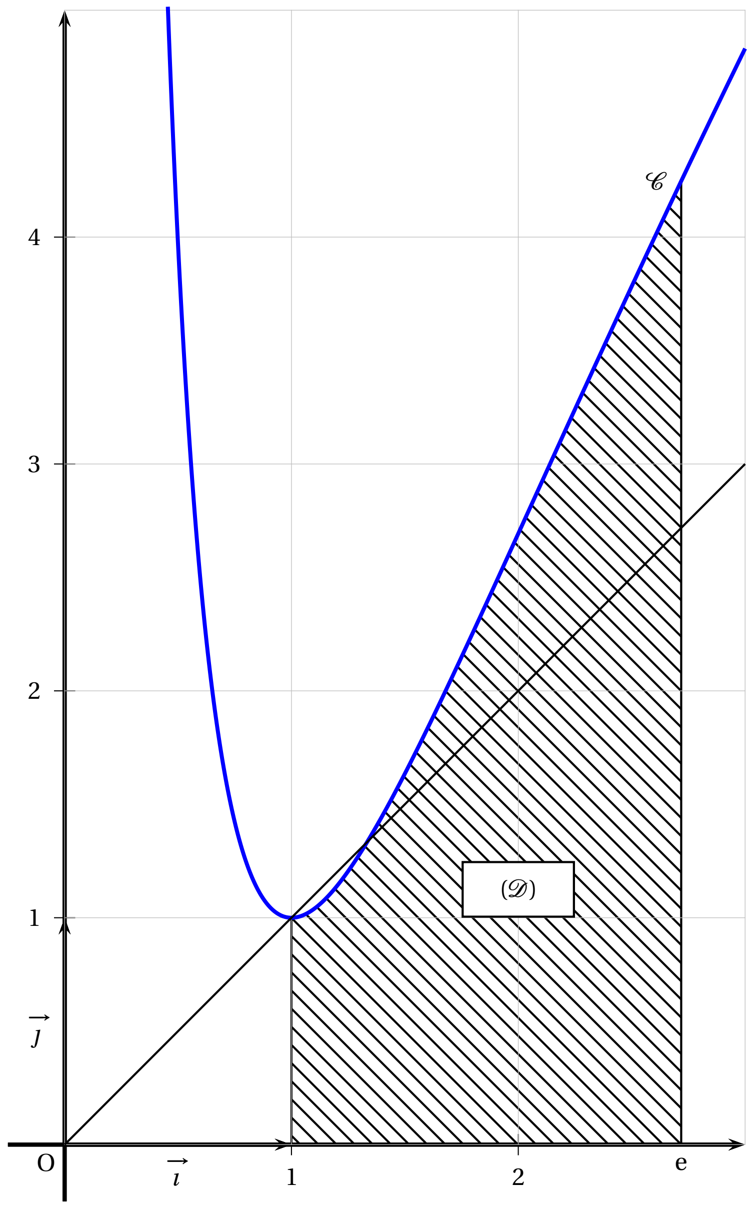
x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

3. $f(x)=x \iff x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=x \iff \left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=0 \iff 3=\dfrac{4}{x} \iff x=\dfrac{4}{3}$ ou $\ln x=0 \iff x=1$.

4. Voir la figure plus bas.
5. Graphiquement : les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les abscisses des deux points communs à $\mathscr{C}$ et à la droite d'équation $y = x$ (bissectrice de l'angle formé par les axes de coordonnées).

Partie C

1. F est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et
$F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - 3 + 3\ln x + 3x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = x - 3 + 3\ln x + 3 - 4\dfrac{\ln x}{x} =$
$x + 3\ln x - 4\dfrac{\ln x}{x} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.
2. **a.** Voir plus bas.
b. On a vu que pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire en unité d'aire du domaine $(\mathscr{D})$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e} + 3\mathrm{e}\ln \mathrm{e} - 2(\ln \mathrm{e})^2 - \left(\frac{1}{2}1^2 - 3 \times 1 + 3 \times 1 \ln 1 - 2(\ln 1)^2\right) =$
$\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 3\mathrm{e} + 3\mathrm{e} - 2 - \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ (u. a).
Or l'unité d'aire est égale à $3 \times 3 = 9$ cm^2.
L'aire du domaine $(\mathscr{D})$ est donc égale à $9\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$ cm^2 soit $37,75$ cm^2 au mm^2 près.


4
3
2
1
$\vec{\jmath}$
O
$\vec{\imath}$
1
2
e
$\mathscr{C}$
($\mathscr{D}$)