Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion 15 juin 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. Le plan est rapporté au repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

   a. Déterminer le module et un argument de z_{A} et de z_{B}.

   b. En déduire une construction des points A et B dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   c. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   d. Déterminer la nature du triangle AOB.

   e. Soit I le point d'affixe $z_{\text{I}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
   Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) :

$$\frac{1}{4}y'' + 9y = 0,$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Trouver la fonction f, solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}.$$

3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \cos\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

   b. En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, de l'équation $f(x) = 0$.

4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{36}\ ;\ \dfrac{\pi}{36}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = 2\text{e}^{-2x} - 8\text{e}^{-x} - 4x + 6.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g'(x) = -4\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g. On ne donnera pas les limites en -1 et $+1$.
3. **a.** Calculer $g(0)$.

   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 8\mathrm{e}^{-x} + 6.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   b. Donner l'interprétation graphique des solutions trouvées à la question précédente.
2. **a.** Étudier la limite de f en $+1$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.

   On donnera une équation de $\mathscr{D}$.

   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 - 8\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{2x}\right)$.

   En déduire la limite de f en -1.
3. **a.** Déterminer la dérivée f' de f. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est du même signe que $\left(-\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f. On précisera la valeur exacte de $f(-\ln 2)$.

   c. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   d. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.

   e. Tracer les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : primitive et calcul d'aire

1. Déterminer une primitive F de la fonction f.
2. Hachurer la partie $\mathscr{E}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, et les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$.
3. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$; en donner une valeur approchée au mm^2 près par défaut.