Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2007 ∽
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{2} - 4\right) z^2 + \left(8 - 8\sqrt{2}\right) z + 16\sqrt{2}.$$

a. Calculer $P(-2\sqrt{2})$.

b. Déterminer une factorisation de $P(z)$ sous la forme :
$P(z) = \left(z + 2\sqrt{2}\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$ où α et β sont deux nombres réels que l'on déterminera.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2\mathrm{i}$, $b = 2 - 2\mathrm{i}$ et $c = -2\sqrt{2}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.

b. Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.

En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$.

c. Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)$..

d. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.

e. En déduire l'égalité : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.

Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %.

On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.

2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.

3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n.

4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?

5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Problème **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 2 cm).

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x).$$

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).

3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

  a. Démontrer que sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α.

  b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.

4. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II. Étude de la fonction *f*

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Etude en $+\infty$.

  a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

  b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

  c. Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe $\mathscr{C}$ et à la droite $\mathscr{D}$.

  d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Étude des variations de f.

  a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.

  b. En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f

4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e^2. Montrer que $\mathscr{T}$ est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.

5. Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. tracer la droite $\mathscr{D}$, la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,25$.)

III. Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

.

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Soit la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

a. Hachurer la région sur votre figure.

b. On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région S. Déterminer la valeur exacte de S.

c. Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.