Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 4z + 16 = 0.$$

2. On note A, B, C, D et E les points du plan d'affixes respectives :

$$a = -2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad b = \overline{a} \quad ; \quad c = 7 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad d = 7 + 5\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad e = -\frac{1}{2}a$$

   a. Démontrer que $b - a = c - d$; en déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   b. Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b et e.
   c. Démontrer l'égalité : $e - c = \dfrac{2}{3}(b - c)$. En déduire que les points B, C et E sont alignés.

3. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et E dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, puis terminer la construction du quadrilatère ABCD en laissant apparents les traits de construction.
4. On note F le point d'affixe : $f = -2 - 6\text{i}\sqrt{3}$.
   Démontrer que le point B est le milieu du segment [AF].
   En déduire le centre de gravité du triangle ACF.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2},$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

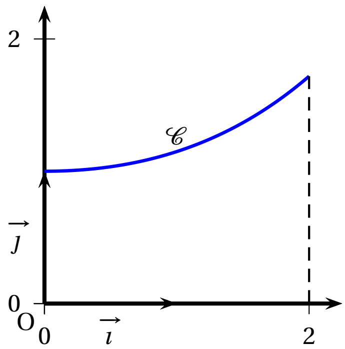
1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{2}y = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x.$$

Vérifier que f est solution de l'équation (E)

3. On a dessiné ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, précédemment définie, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.



On note $\mathscr{K}$ le solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

a. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : H(x) $= 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}(x-2)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte du volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{K}$, exprimée en unités de volume.

(On rappelle que $\mathscr{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.)

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnée.)

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2},$$

et de calculer une aire.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

I. Étude du comportement asymptotique de la fonction *f*

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x+1}.$$

a. Vérifier que, pour tout réel x non nul appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$:

$$h(x) = \frac{3 + \frac{2}{x}}{x + 2 + \frac{1}{x}}.$$

b. En déduire la limite de h en $+\infty$.

2. Mise en évidence d'une asymptote oblique.

a. Vérifier que,pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1~;~+\infty[$:
$f(x) = x-2+h(x)$, où h est la fonction définie dans la question précédente.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que la droite (Δ), d'équation : $y = x-2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (Δ).

3. Déterminer la limite de f en -1 et en déduire que $\mathscr{C}$ a une asymptote (Δ') dont on donnera une équation.

II. Étude des variations de f et tracé de $\mathscr{C}$

1. Montrer que le point O appartient à $\mathscr{C}$.

2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1~;~+\infty[$:
$f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.
En déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

3. Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et les deux asymptotes (Δ) et (Δ') dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

III. Calcul d'aire

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = \frac{1}{x+1} + 3\ln(x+1).$$

Montrer que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

2. On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par $\mathscr{C}$, (Δ), et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

a. Hachurer le domaine $\mathscr{S}$ sur le dessin.

b. Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{S}$.

c. En déduire l'aire en cm^2, arrondie au mm^2, du domaine $\mathscr{S}$.