Baccalauréat STI – Nouvelle–Calédonie novembre 2004
Génie mécanique, civil, énergétique

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle a, b, c les nombres complexes suivants

$$a = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad b = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad c = ab.$$

1. Écrire b et c sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes a et c.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.
4. On considère les points B d'affixe b et C d'affixe c.
   Placer les points B et C dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ et montrer que le triangle OBC est équilatéral.
5. On appelle D le point d'affixe $d = b + c$. Placer le point D sur la figure et montrer que le quadrilatère OBDC est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

I. Première partie

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ».
On admettra que 5 % des appareils sont concernés par la panne « a », 3 % par la panne « b » et 1 % par les deux pannes.
On prélève au hasard un appareil dans la production. On note A l'évènement : l'appareil présente la panne « a » et B l'évènement : l'appareil présente la panne « b ».

1. Montrer que la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » ou la panne « b » est $0,07$.
2. Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?
3. Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

II. Deuxième partie

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40 € et la réparation des deux pannes coûte 100 €.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
4. Que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

PROBLÈME **11 points**

I. Première partie

Le but de cette partie est de trouver des solutions de l'équation différentielle (L) :

$$y' - 2y = -2x - 5$$

où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x par $h(x) = x + 3$. Montrer que h est solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$. On notera g la solution générale de (E_0).
3. Recherche d'une solution particulière de l'équation (E).
   On considère la fonction φ définie pour tout réel x par $\varphi(x) = g(x) + h(x)$.
   a. Montrer que φ est solution de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer la solution particulière φ_0 de l'équation (E) qui vérifie $\varphi'(0) = 2$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = -e^{2x} + x + 3.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Étude en $-\infty$.
   a. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite Δ.
2. étude en $+\infty$.
   a. Justifier que pour tout nombre réel x non nul,
   $$f(x) = \left[\frac{e^x}{x}\left(e^{-x}\right) + 1 + \frac{3}{x}\right] x.$$
   b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Étude des variations de f
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Donner la valeur exacte de son maximum.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites Δ et (T) puis la courbe $(\mathscr{C})$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$.

1. Déterminer en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
2. Déterminer a pour que $\mathscr{A} = \frac{1}{2}$.