Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2007
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

1.

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	48
Nombre de pièces non défectueuses	760	192	952
Total	800	200	1 000

2. **a.** Cette probabilité est donnée par l'énoncé : $p(\text{A}) = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

   b. $p(\text{B}) = \dfrac{48}{1\,000} = 0,048$.

   c. Il faut trouver $p_{\text{M}_1}(\overline{\text{B}}) = \dfrac{p\left(\text{M}_1 \cap \overline{\text{B}}\right)}{p(\text{M}_1)} = \dfrac{760}{800} = \dfrac{19}{20} = 0,95$.

3. **a.** X peut prendre les valeurs : 38 42,30 42,50.

   b.

x_i	38	42,30	42,50
$p(X = x_i)$	0,952	0,04	0,008

   c. On a $\text{E(X)} = 38 \times 0,952 + 42,30 \times 0,04 + 42,50 \times 0,008 = 38,208$.

   d. L'espérance précédente correspond au prix moyen de revient pour un grand nombre de pièces produites ; pour ne pas vendre à perte il faut fixer le prix de vente à au moins 38,21 €.

EXERCICE 2 **4 points**

$$f(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - 6.$$

1. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :
   $f'(x) = 2\text{e}^{2x} - \text{e}^{x} = \text{e}^{x}\left(2\text{e}^{x} - 1\right)$.
   $f'(x) = \text{e}^{x}\left(2\text{e}^{x} - 1\right)$.

   b. Quel que soit le réel x, $\text{e}^{x} > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2\text{e}^{x} - 1$.
   Or $2\text{e}^{x} - 1 > 0 \iff 2\text{e}^{x} > 1 \iff \text{e}^{x} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow x > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff x > -\ln 2$, et de même $2\text{e}^{x} - 1 < 0$ si $x < -\ln 2$.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{x} = 0$.
   Comme $f(x) = \text{e}^{x}\left(2\text{e}^{x} - 1\right) - 6$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -6$.

   b. Toujours en utilisant l'écriture précédente et compte tenu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{x} = +\infty$, on conclut que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** D'après la question 1. b., la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$ et croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$. D'où le tableau de variations :

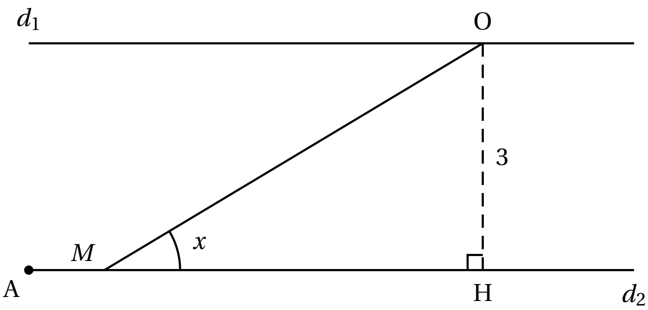
x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	-6	↘		↗	$+\infty$

b. D'après le tableau le minimum de la fonction est $f(-\ln 2) = \mathrm{e}^{2\times(-\ln 2)} - \mathrm{e}^{-\ln 2} - 6 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} - 6 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} - 6 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 6 = -\dfrac{1}{4} - 6 = -\dfrac{25}{4}$.

c. D'après le tableau de variations, sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, $f(x) \leqslant -6$, donc elle ne s'annule pas.

Sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, la fonction croît de $-\dfrac{25}{4}$ à $+\infty$: elle s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.

PROBLÈME **10 points**



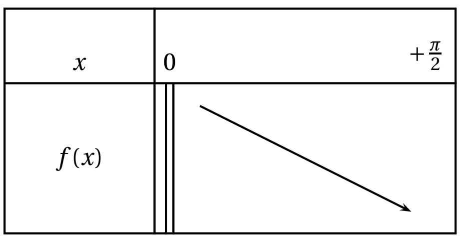
Partie I : conjecture puis vérification

1. On peut conjecturer que OM et x varient inversement l'un de l'autre.

2. Par définition : $\sin x = \dfrac{3}{\mathrm{O}M} \iff \sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{3}{\mathrm{O}M} \iff \mathrm{O}M = \dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$.

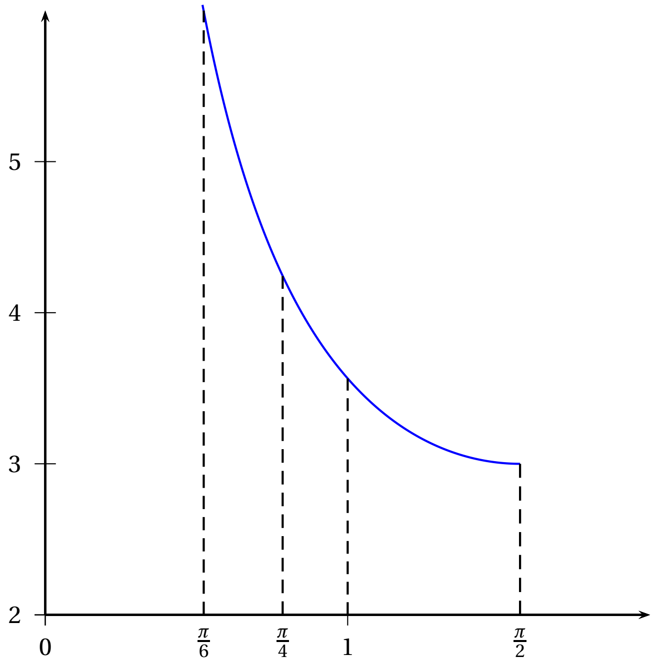
3. Toujours par définition du sinus : $\sin x = \dfrac{3}{\mathrm{O}M} \iff \mathrm{O}M = \dfrac{3}{\sin x}$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4. $f'(x) = -\dfrac{3\cos x}{(\sin x)^2} = \dfrac{-3\cos x}{\sin^2 x}$. Sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin^2 x > 0$ et $\cos x > 0$, donc $f'(x) < 0$. La fonction f est décroissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :



x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	1	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$	6	$3\sqrt{2}$	$\approx 3,565$	3

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Prendre 2 cm pour unité graphique.



Partie II : Calcul d'un volume

1. Sur cet intervalle $\sin x \neq 0$, donc g est dérivable et :
$g'(x) = -\dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.
$h(x) = \dfrac{9}{\sin^2 x} = 9 \times \dfrac{1}{\sin^2 x}$; d'après la question précédente, une primitive de cette fonction est la fonction $-9\dfrac{\cos x}{\sin x}$.
2. On a donc :
$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \pi\left[-9\frac{\cos x}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -9\pi\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} + 9\pi\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 0 + 9\pi\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} =$$
$9\pi\sqrt{3} \approx 48,972$(u. v.)
L'unité étant égale à 2 cm, l'unité de volume est égale à $2^3 = 8\text{cm}^3$.
Donc $V = 9\pi\sqrt{3} \times 8 = 72\pi\sqrt{3} \approx 391,781\text{cm}^3$ à 1 mm^3 près.