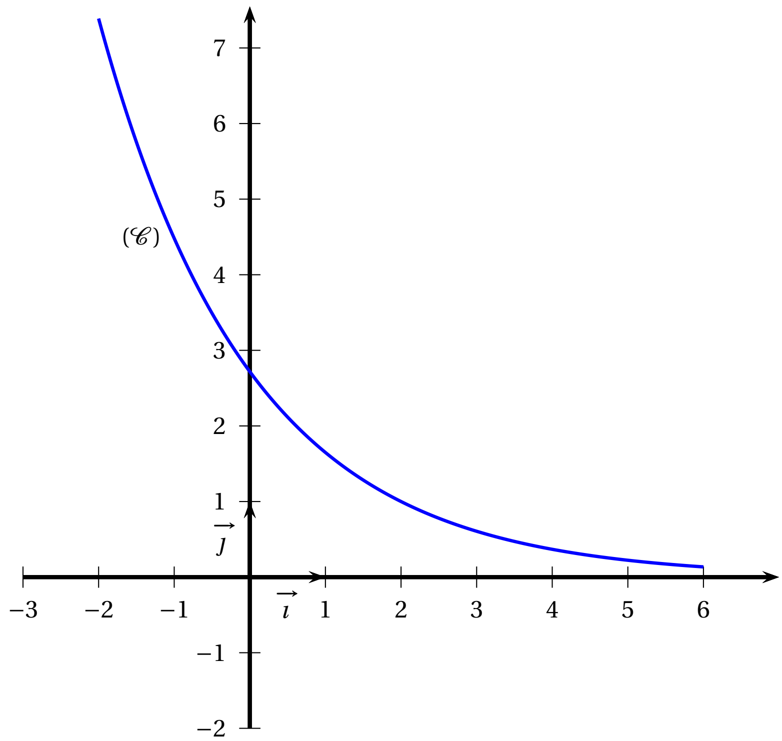
Corrigé du baccalauréat STI Métropole
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E sept. 2007

EXERCICE 1 **4 points**

1. On sait que les solutions sont de la forme $y = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$, $K \in \mathbb{R}$.
2. $f(2) = 1 \iff K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 2} = 1 \iff K\mathrm{e}^{-1} = 1 \iff K = \mathrm{e}$.
   Donc $f(x) = \mathrm{e}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-\frac{1}{2}$, donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
4.



EXERCICE 2 **6 points**

1. $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2+3=0 \iff (z-1)^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 0 \iff \left(z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 0$.
   IL y a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. **a.** $(z-(1+\mathrm{i}))\left(z^2-2z+4\right) = z^3-2z^2+4z-(1+\mathrm{i})z^2+2(1+\mathrm{i})z-4(1+\mathrm{i}) = z^3-2z^2+4z-z^2-\mathrm{i}z^2+2z+2\mathrm{i}z-4-4\mathrm{i} = z^3-(3-\mathrm{i})z^2+(6+\mathrm{i})z-4(1+\mathrm{i}) = P(z)$.

   b. $P(z) = 0 \iff (z-(1+\mathrm{i}))\left(z^2-2z+4\right) = 0 \iff \begin{cases} z-(1+\mathrm{i}) & = & 0 \\ z^2-2z+4 & = & 0 \end{cases}$.

   Les solutions sont donc $z_1 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_2 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_3 = 1+\mathrm{i}$.
3. **a.** $q = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)}{1+3} = \dfrac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}+\mathrm{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

b. On a $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$.
On peut écrire $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$: un argument de z_1 est donc $\dfrac{\pi}{4}$.
De même $z_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$: un argument de z_2 est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

c. On sait que $|q| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Conclusion des résultats sur les arguments trouvés ci-dessus : on a arg $(q) = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12}$

d. De la question précédente on peut écrire que $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \text{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$. En identifiant cette écriture avec le résultat du 3. a. $q = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + \text{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires :
$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

PROBLÈME

Question préliminaire

On lit $f(0,5) = 2 \iff a + \dfrac{b}{0,5} = 2 \iff a + 2b = 2$.
On lit aussi $f(2) = 0,2 \iff a + \dfrac{b}{2} = 0,2 \iff 2a + b = 0,4$.
On a donc $b = 0,4 - 2a$ et en reportant dans la première équation : $a + 2(0,4-2a) = 2 \iff a + 0,8 - 4a = 2 \iff -1,2 = 3a \iff a = -0,4$ et ensuite $b = 0,4 - 2\times(-0,4) = 0,4 + 0,8 = 1,2$.
Conclusion : $f(x) = -0,4 + \dfrac{1,2}{x}$.

Partie A. Étude de fonction

1. $0 \notin [0,5~;~2]$, donc f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = -\dfrac{1,2}{x^2}$.
2. Comme $\dfrac{1}{x^2} > 0$ sur $[0,5~;~2]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $[0,5~;~2]$.
3. $M(x~;~y) \in T_1 \iff y - f(0,5) = f'(0,5)(x-0,5)$.
$f(0,5) = -0,4 + \dfrac{1,2}{0,5} = -0,4 + 2,4 = 2$ et $f'(0,5) = -\dfrac{1,2}{0,5^2} = -4,8$.
Donc $M(x~;~y) \in T_1 \iff y - 2 = -4,8(x-0,5) \iff y = -4,8x + 2,4 + 2 \iff y = -4,8x + 4,4$.
De même $M(x~;~y) \in T_2 \iff y - f(2) = f'(2)(x-2)$.
$f(2) = -0,4 + \dfrac{1,2}{2} = -0,4 + 0,6 = 0,2$ et $f'(2) = -\dfrac{1,2}{2^2} = -0,3$.
Donc $M(x~;~y) \in T_2 \iff y - 0,2 = -0,3(x-2) \iff y = -0,3x + 0,6 + 0,2 \iff y = -0,3x0,8$.
4. Tracer, dans le repère indiqué, les droites T_1 et T_2, ainsi que la courbe $(\mathscr{C})$. Voir plus bas.

5. **a.** Une primitive de la la fonction $\dfrac{1}{x}$, avec $x \neq 0$, est la fonction $\ln x$, avec $x > 0$; une primitive de la fonction f est donc la fonction F définie sur $[0,5\,;\ 2]$ par $F(x) = -0,4x + 1,2\ln x$.

b. La fonction f est décroissante sur $[0,5\,;\ 2]$ et le minimum est égal à $f(2) = 0,2 > 0$; la fonction est donc positive sur l'intervalle $[0,5\,;\ 2]$.

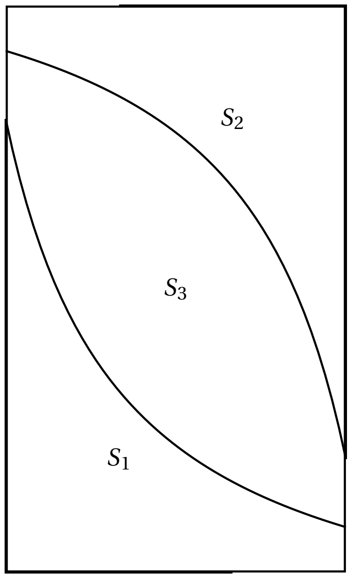
On sait alors que l'aire exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0,5$ et $x = 2$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{0,5}^{2} = F(2) - F(0,5) = -0,4 \times 2 + 1,2\ln 2 -$

$(-0,4 \times 0,5 + 1,2\ln 0,5) = -0,8 + 1,2\ln 2 + 0,2 - 1,2\ln \frac{1}{2} =$

$-0,6 + 1,2\ln 2 + 1,2\ln 2 = 2,4\ln 2 - 0,6$ (u. a.).

Partie B. Étude de la masse perdue en production



1. L'aire restante S_3 dans le rectangle est égale à :

$2,5 \times 1,5 - 2(2,4\ln 2 - 0,6) = 3,75 - 4,8\ln 2 + 1,2 = 4,95 - 4,8\ln 2 \approx 1,622\,89 \approx 1,622\,9$.

2. Une plaque de 3,75 m^3 a une masse de 500 kg, donc la partie restante S_3 a une masse de $(4,95 - 4,8\ln 2) \times \dfrac{500}{3,75} \approx 216,386$ kg au gramme près