

❧ Corrigé du baccalauréat STI Métropole juin 2007 ❧
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1

4 points

1.

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5	67	13	80
Longueur non conforme 2,6	15	5	20
Total	82	18	100

2. a. Il y a 67 plaquettes conformes ; la probabilité est donc égale à $\frac{67}{100} = 0,67$.

b. Il y a $13 + 15 = 28$ plaquettes qui n'ont qu'une dimension non conforme ; la probabilité est donc égale à $\frac{28}{100} = 0,28$.

3. a. X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

b.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,67	0,28	0,05

EXERCICE 2

5 points

1. $z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 + 3 = 0 \iff (z-1)^2 - (i\sqrt{3})^2 = 0 \iff (z-1+i\sqrt{3})(z-1-i\sqrt{3}) = 0$

qui donne les deux solutions complexes conjuguées :

$$1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 1 + i\sqrt{3}.$$

On peut également calculer $\Delta = -12 \dots$

2.

$$z_A = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_C = 1 + i\sqrt{3}.$$

a. Voir la figure en bas.

b. $OA = |z_A| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$

$OB = |z_B| = 2;$

$AB = |z_B - z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$

Donc $OA = OB = AB$: le triangle OAB est équilatéral.

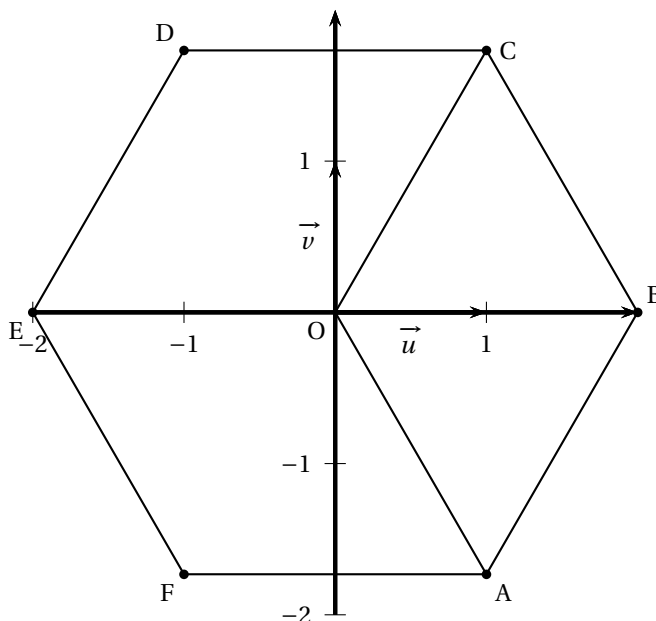
$OC = |z_C| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$

$BC = |z_C - z_B| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$

Donc $OB = OC = BC$: le triangle OBC est équilatéral

c. Il suffit de construire D, E et F symétriques respectivement de A, B et C autour de O

d. $z_A \times z_B \times z_C \times z_D \times z_E \times z_F = -4(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = -4(1+3)(1+3) = -64.$



Problème

11 points

1. Limites aux bornes

- a. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b. $f(x) = e^{-x} + 2x - 3 = e^{-x} + 2xe^{-x}e^x - 3e^{-x}e^x = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$.
 Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2xe^x - 3e^x = 1$ et finalement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Asymptote oblique

- a. Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par : $d(x) = f(x) - (2x - 3) = e^{-x}$.
 On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0$: ceci montre que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de plus l'infini.
- b. Comme $d(x) = e^{-x}$, la fonction d est positive non nulle ce qui montre que la courbe (\mathcal{C}) est au dessus de (\mathcal{D})

3. Étude des variations de la fonction f

- a. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = -e^{-x} + 2 = \frac{1}{e^x} + 2\frac{e^x}{e^x} = \frac{2e^x - 1}{e^x}$$
- b. $f'(x) = 0 \iff 2e^x - 1 = 0 \iff 2e^x = 1 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff$
 (par croissance de la fonction \ln) $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x = -\ln 2$.
- c. On a de même $f'(x) > 0 \iff x > -\ln 2$ et $f'(x) < 0 \iff x < -\ln 2$.
- d. La fonction est donc décroissante sur $] -\infty ; -\ln 2[$ et croissante sur $] -\ln 2 ; +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$\nearrow +\infty$

e. $f(1) = e^{-1} + 2 - 3 = e^{-1} - 1 \approx -0,63$. Comme la fonction est croissante sur $[0; 1]$, on peut en conclure que sur $[0; 1]$, $f(x) < 0$.

4. Voir la figure plus bas.

5. On vient de voir que sur $[0; 1]$ la fonction f est négative non nulle ; donc l'aire (\mathcal{A}) est égale à l'opposé de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x) dx = [-e^{-x} + x^2 - 3x]_0^1 = -e^{-1} + 1^2 - 3 \times 1 - (-e^{-0} + 0^2 - 3 \times 0) = -e^{-1} - 1.$$

Donc (\mathcal{A}) = $1 + e^{-1}$ (u. a.)

Or l'unité d'aire est égale à $2 \times 1 = 2 \text{ cm}^2$.

Donc (\mathcal{A}) = $2(1 + e^{-1}) \text{ cm}^2$ soit $\approx 2,735 \approx 2,74 \text{ cm}^2$

6. Cette aire est légèrement supérieure à celle du trapèze ayant pour sommets les points de coordonnées $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; f(1))$ et $(0; -2)$ soit $\frac{2 + |f(1)|}{2} \times 1 \approx \frac{2 + 0,63}{2} \approx 1,315$ (u.a.) soit environ $2,63 \text{ cm}^2$.

Les résultats sont bien voisins.

