Baccalauréat STI Métropole septembre 2011
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $P(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$. 2 est donc une racine de P.

   b. $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c = az^3 + (b-2a)z^2(c-2b)z - 2c = 0$. Ce polynôme est égal à $P(z)$ si :

   $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-2a & = & 2 \\ c-2b & = & 0 \\ -2c & = & -16 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-2 & = & 2 \\ c-2b & = & 0 \\ c & = & 8 \end{array}\right.$ et enfin $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 4 \\ c & = & 8 \\ c & = & 8 \end{array}\right.$

   Conclusion : $P(z) = (z-2)\left(z^2 + 4z + 8\right)$.

   c. D'après le résultat précédent :

   $P(z) = 0$ revient à $\left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0 \quad \text{ou} \\ z^2 + 4z + 8 & = & 0 \end{array}\right.$

   La première équation a pour solution 2 (trouvée à la question 1.)

   L'équation du second degré : $z^2 + 4z + 8 = 0$.

   $\Delta = 4^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4\text{i})^2 < 0$: l'équation a donc deux solutions complexes :

   $z_2 = \dfrac{-4 + 4\text{i}}{2} = -2 + 2\text{i}$ et $z_3 = -2 - 2\text{i}$.

   Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc :

   $$z_1 = 2, \quad z_2 = -2 + 2\text{i}, \quad z_3 = -2 - 2\text{i}.$$

2. **a.** Voir la figure à la fin de l'exercice.

   b. $|z_\text{B}|^2 = (-2)^2 + 2^2 = 4 \times 2$, donc $|z_\text{B}| = 2\sqrt{2}$; on peut donc écrire en factorisant ce module :

   $z_\text{B} = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Or $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Donc un argument de z_B est $\dfrac{3\pi}{4}$.

   $|z_\text{C}|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 = 4 \times 2$, donc $|z_\text{C}| = 2\sqrt{2}$.

   Donc $z_\text{C} = 2\sqrt{2}\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

   Or $\cos\frac{-3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{-3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

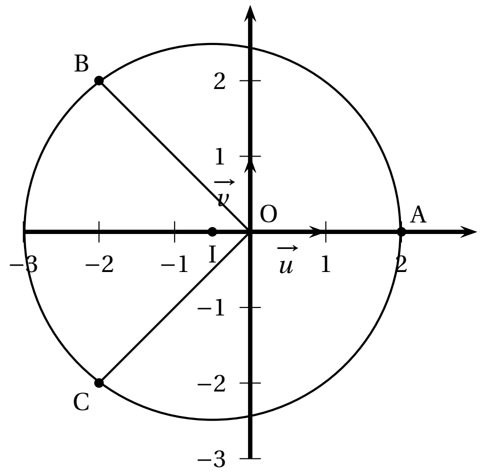
   Donc un argument de z_C est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

3. On a $\text{IA}^2 = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$.

   $\text{IB}^2 = \left(-2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \dfrac{9}{4} + 4 = \dfrac{25}{4}$.

   $\text{IC}^2 = \left(-2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 = \dfrac{9}{4} + 4 = \dfrac{25}{4}$.

   On a donc $\text{IA} = \text{IB} = \text{IC} = \dfrac{5}{2}$: les trois points A, B et C appartiennent au cercle de centre I de rayon $\dfrac{5}{2}$.



EXERCICE 2 **5 points**

1.

Une pièce sur 20, soit 5 sur 100 n'ont pas la dimension voulue ; 95 ont une dimension correcte.

$100-5=95$ ont la dimension correcte.

Comme 88 pièces n'ont pas de défaut, il y a $95-88=7$ pièces qui ont un problème de résistance et une dimension correcte ; il y a $90-88=2$ pièces qui ont une résistance correcte et un problème de dimension.

	Problème de dimension	Dimension correcte	Total
Problème de résistance	3	7	10
Résistance correcte	2	88	90
Total	5	95	100

2. Il y a 3 pièces sur 100 qui ont les deux défauts ; la probabilité est donc égale à $\dfrac{3}{100}=0,03$.

3. **a.** Il y a 88 pièces sans défaut qui rapportent chacune 5 euros. La probabilité est donc égale à $\dfrac{88}{100}=0,88$.

b.

$X=$	0	3	5
$p(X=x_i)$	0,1	0,02	0,88

c. On a $\text{E}(X)=0\times0,1+3\times0,02+5\times0,88=0,06+4,4=4,46$.

Ce nombre représente le bénéfice moyen espéré par pièce.

L'entreprise Anatoly rapportera en moyenne par jour : $1\,500\times4,46=6\,690$ € ;

L'entreprise Basilia rapportera en moyenne par jour : $1\,800\times4=7\,200$ €.

Le bénéfice de l'entreprise Basilia sera supérieur à celui de l'entreprise Anatoly.

PROBLÈME **10 points**

Partie A. Étude des limites et des variations de la fonction *f*

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini ;

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro.

2. f somme de deux fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et :
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{x^2}$.

3. $f'(x) = -\left[\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x^2}\right]$; or $\mathrm{e}^{-x} >$ quel que soit le réel x et $\dfrac{1}{x^2} > 0$ quel que soit le réel de $]0~;~+\infty[$; le crochet est positif et finalement $f'(x) < 0$ sur $]0~;~+\infty[$.
La fonction f est donc décroissante sur $]0~;~+\infty[$.

4. Des questions précédentes, on déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$ 0

Partie B. Étude de propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. a. Soit d la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $d(x) = f(x) - \dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-x}$.
On sait que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $d(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.

b. Le résultat précédent signifie géométriquement que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{H}$.

2. Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est égal à $f'(1) = -\left[\mathrm{e}^{-1} + \dfrac{1}{1^2}\right] = -\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}} + 1\right) \approx 1{,}367 \approx 1{,}37$ au centième près.

3.

Partie C. Calcul d'aire

1. Une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction e^{-x} est la fonction $-\mathrm{e}^{-x}$;
Une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{x}$ est la fonction $\ln|x| = \ln x$ puisque $x > 0$;
Une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction f est la fonction $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \ln x$.

2. $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = -\mathrm{e}^{-2} + \ln 2 - \left(-\mathrm{e}^{-1} + \ln 1\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} + \ln 2 = \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln 2 = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2} + \ln(2)$.

3. a. Voir la figure à la fin.

b. On a vu que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{H}$, donc l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la courbe $\mathcal{H}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est égale à l'intégrale :
$\mathcal{E} = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^2 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$.

c. On a $\mathcal{E} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2325 \approx 0{,}23$ (unité d'aire).

Annexe à rendre avec la copie (problème)