∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2011 ∾
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

a. Calculer $P(2)$.

b. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = -2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_C = -2 - 2\text{i}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_B et z_C.

3. Soit I le point d'affixe $z_I = -\dfrac{1}{2}$.
Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre I dont on déterminera le rayon.

EXERCICE 2 **5 points**

L'entreprise Anatoly fabrique des pièces (1 500 unités par jour).
Certaines pièces ont un ou deux défauts de fabrication.
Sur un lot de 100 pièces choisies au hasard, on constate :

— qu'une pièce sur 20 n'a pas la dimension voulue;
— que 10 pièces manquent de résistance;
— qu'au total, 88 pièces n'ont pas de défaut.

On considère que cet échantillon permet de modéliser l'ensemble de la fabrication des pièces.
On choisit une pièce au hasard.
On suppose que le choix d'une pièce se fait dans une situation d'équiprobabilité.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Problème de dimension	Dimension correcte	Total
Problème de résistance			
Résistance correcte			
Total	5		100

2. Quelle est la probabilité de choisir une pièce ayant deux défauts ?

3. La vente des pièces sans défaut rapporte un bénéfice de 5 euros à l'entreprise Anatoly. Les pièces de mauvaise dimension sont rectifiées pour un coût de 2 euros, puis vendues au prix habituel. Celles qui manquent de résistance sont jetées.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie, associe le bénéfice réalisé.
   a. Quelle est la probabilité qu'une pièce rapporte 5 euros ?
   b. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance de X. Que représente ce nombre pour l'entreprise ?
   Un investisseur souhaite acheter soit l' entreprise Anatoly soit l'entreprise Basilia.
   Cette entreprise Basilia fabrique 1 800 pièces par jour et réalise un bénéfice moyen de 4 euros sur chaque pièce produite.
   En expliquant les raisons du choix, indiquer celle des deux entreprises qui rapportera le plus à l'investisseur.

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A. Étude des limites et des variations de la fonction f

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 0.
   Donner une équation de chacune des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
2. f' désigne la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de la dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B. Étude de propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. **a.** Étudier le signe de $f(x) - \dfrac{1}{x}$ quand x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Soit $\mathscr{H}$ la courbe représentant la fonction inverse dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la courbe $\mathscr{H}$.
2. Déterminer la valeur arrondie au centième du coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. En annexe, on a représenté la courbe $\mathscr{H}$. Représenter la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$ sur ce même graphique.

Partie C. Calcul d'aire

1. Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Déterminer $F(x)$.
2. Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2} + \ln(2)$.
3. On désigne par $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la courbe $\mathscr{H}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
   a. Hachurer $\mathscr{E}$ sur le graphique.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire de cette partie $\mathscr{E}$, exprimée en unités d'aire.
   c. Donner, en unités d'aire, une valeur approchée au centième près de cette aire.

Annexe à rendre avec la copie (problème)