Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole juin 2007

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 4 points

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$ où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

EXERCICE 2 — 5 points

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation
$$z^2 + 2z + 10 = 0.$$
2. Déterminer les nombres complexes c et d vérifiant le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2c + d & = & 1 + 13\mathrm{i} \\ -c + d & = & 4 + 8\mathrm{i} \end{array}\right.$$
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
   a. Placer sur une figure les points A, B, C et D dont les affixes respectives sont :
   $$-1 + 3\mathrm{i},\ -1 - 3\mathrm{i},\ 3 - 5\mathrm{i}\ \text{ et } 7 + 3\mathrm{i}.$$
   b. Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A.
   c. Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.
   d. En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon. Tracer le cercle sur la figure.

PROBLÈME — 11 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(x\ln x + 1)$.
   On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.

   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. **a.** On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

   b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. L'étude des limites n'est pas demandée.
2. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déduire des questions B 1 et B 2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. **a.** f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \text{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant 0,6 pour valeur approchée de α.
3. **a.** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

   b. Construire l'asymptote $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;2{,}5]$.

Partie D : calcul d'aire

1. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \text{e}^x \ln x$ est une primitive de f.
2. On désire calculer l'aire de la partie $\mathcal{E}$ du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   a. Hachurer la partie $\mathcal{E}$ sur le dessin.
   b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{E}$ en unités d'aires, puis en cm^2.