Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2000
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** On a obtenu $3 \times 3 \times 3 = 27$ petits cubes.

   b. Il n'y a qu'un seul cube non peint : celui au centre du gros cube ;
   N'ont qu'une seule face peinte : ceux qui sont au centre d'une face soit 6 ;
   On deux faces peintes ceux qui sont au centre des arêtes soit 12 ;
   Restent ceux qui sont aux coins : 8.

2. On a donc le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

On a $\text{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{27} + 1 \times \dfrac{6}{27} + 2 \times \dfrac{12}{27} + 3 \times \dfrac{8}{27} = \dfrac{6+24+24}{27} = \dfrac{54}{27} = 2$.

$\overline{x} = \dfrac{1}{4}(0+1+2+3) = \dfrac{3}{2}$, d'où $V(X) = \dfrac{1}{4}\left[(0-1,5)^2 + (1-1,5)^2 + (2-1,5)^2 + (3-1,5)^2\right] = \dfrac{2,25+0,25+0,25+2,25}{4} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

Enfin $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,25} = \sqrt{\dfrac{125}{100}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$.

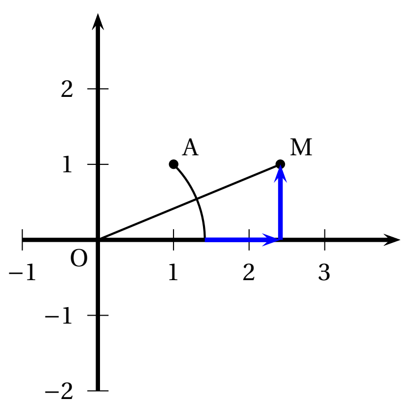
EXERCICE 2 **4 points**

1. On sait que $\text{OA} = |z_{\text{A}}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. On place facilement A, puis en reportant avec le compas la longueur $\sqrt{2}$ sur l'axe des abscisses, on se déplace de $+1$ en abscisse et de $+1$ en ordonnée. Voir plus bas.

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure ci-dessous on a $\text{O}M^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$, donc $\text{O}M = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

3. **a.** $z_{\text{A}}^2 = (1+\text{i})^2 = 1 - 1 + 2\text{i} = 2\text{i}$.
   Comme $z_{\text{M}} = \sqrt{2} + z_{\text{A}}$, on a $z_{\text{M}}^2 = \left(\sqrt{2} + z_{\text{A}}\right) = 2 + z_{\text{A}}^2 + 2z_{\text{A}}\sqrt{2}$ soit en utilisant précédent :
   $z_{\text{M}}^2 = 2 + 2\text{i} + 2\sqrt{2}(1+\text{i}) = 2 + 2\sqrt{2} + \text{i}\left(2+2\sqrt{2}\right) = \left(2\sqrt{2}+2\right)(1+\text{i})$.

   b. z_{M}^2 a donc les mêmes arguments que z_{A}, soit par exemple $\dfrac{\pi}{4}$, donc un argument de z_{M} est $\dfrac{\pi}{8}$



PROBLÈME 12 points

Partie A

1. On sait que la dérivée de la fonction $\ln u(x)$ où $u(x)$ est une fonction dérivable est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
   Ici $u(x) = ax^2 + bx$, d'où $u'(x) = 2ax + b$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx}$.
2. Pn a donc $f(1) = 0$ soit $\ln(a+b) = 0 = \ln 1$, donc $a+b = 1$.
   D'autre part le coefficient directeur de la tangente en A est nul ; ce coefficient directeur est égal au nombre dérivé $f'(1)$.
   Donc $f'(1) = 0$ ou $\dfrac{2a \times 1 + b}{a \times 1^2 + b \times 1} = 0 \iff 2a + b = 0$.
   De $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$ on obtient par différence $a = -1$, puis $b = 2$.
   On a donc $f'(x) = \ln\left(-x^2 + 2x\right)$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. **a.** $g(x)$ est un trinôme dont les racines sont 0 et 2. Il est négatif sauf entre 0 et 2 où il est positif.
   b. De façon évidente $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, mais comme on l'a vu à la question précédente $g(x)$ tend vers zéro en restant positif.
   Donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln g(x) = -\infty$.
   c. On a de même $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ en restant positif, donc $\lim\limits_{x \to 2} \ln g(x) = -\infty$
   d. Les résultats précédents signifient que les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ sont asymptotes verticales à la courbe $\mathscr{C}$.
2. On a $g'(x) = 2x + 2$.
   Comme $f(x) = \ln g(x)$, $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{-2x+2}{g(x)}$.
3. On sait que sur $]0~;~2[$, $g(x) > 0$: le signe de $f'(x)$est donc celui du numérateur $-2x+2$;
   $-2x+2 > 0 \iff 2 > 2x \iff 1 > x \iff x < 1$;
   $-2x+2 < 0 \iff 2 < 2x \iff 1 < x \iff x > 1$;
   $-2x+2 = 0 \iff 2 = 2x \iff 1 = x \iff x = 1$.
   On a donc le tableau de variations de f suivant :

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Partie C : Calcul d'aire.

1. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient :
   $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} + \ln(2-x) + (x-2) \times dfrac12 - x \times (-1) - 2 = \ln x + 1 + \ln(2-x) + 1 - 2 = \ln x + \ln(2-x) = \ln x(2-x) = \ln\left(2x - x^2\right) = f(x)$.
   Conclusion : F est une primitive de f.

2. En supposant que $\alpha < 1$, la fonction f étant négative sur $[\alpha\ ;\ 1]$, l'aire de la partie du plan considérée est égale à :

$\mathrm{A}(\alpha) = -\displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left[F(x)\right]_{\alpha}^{1} = F(\alpha) - F(1) =$

$\alpha \ln \alpha + (\alpha - 2)\ln(2 - \alpha) - 2\alpha - (1 \ln 1 + (1 - 2)\ln(2 - 1) - 2 \times 1) =$

$\alpha \ln \alpha + (\alpha - 2)\ln(2 - \alpha) + 2$ (u. a.).

On sait $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc

$\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{A}(\alpha) = -2\ln 2 + 2 = 2(1 - \ln 2) \approx 0{,}61$ à 0,01 près. (ce que l'on contrôle approximativement sur la figure ci-dessous