Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2001
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **4 points**

1. On a les neuf tirages suivants :
(1 ; 1), (1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 1), (3 ; 2), (3 ; 3).

2. **a.** $X \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

b. On a le tableau suivant :

$X = x_i$	1	2	3	4	6	9
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

c. $E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{1}{9} = \frac{1+4+6+4+12+9}{9} = \frac{36}{9} = 4$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $|z_1|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow |z_1| = 2$.
Donc $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
Donc un argument de z_1 est $\frac{3\pi}{4}$.
$|z_2|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow |z_2| = 2$.
Donc $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
Donc un argument de z_2 est $\frac{\pi}{6}$.

2. **a.** On a $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc $z_2^2 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, donc par produit $Z = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right]} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$.

b. $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \Rightarrow z_2^2 = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^2 = 3 - 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$
Donc $Z = z_1 z_2^2 = \left(-\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$.

c. D'après les deux derniers résultats :
$Z = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right) \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8} + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}$. En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :

$$\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \qquad \sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

PROBLÈME **11 points**

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Or $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, on a finalement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = f(x) - (x+2) = \text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x}$.

On a vu que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} = 0$, ce qui signifie graphiquement que la droite D d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

c. Il faut donc étudier le signe de $d(x)$.

Or $d(x) = \text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} = \text{e}^{x}\left(\text{e}^{x} - 3\right)$ qui est du signe de $\text{e}^{x} - 3$ car $\text{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x.

On a donc $d(x) > 0 \iff \text{e}^{x} - 3 > 0 \iff \text{e}^{x} > 3 \iff x > \ln 3$ par croissance de la fonction logarithme népérien.

Conclusion : sur $]\ln 3\ ;\ +\infty]$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite D.

On trouve de même que sur $]-\infty\ ;\ \ln 3[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite D.

Pour $x = \ln 3$, la courbe et la droite ont un point commun d'ordonnée $2 + \ln 3$.

2. Comme $\text{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x on peut le factoriser dans l'écriture de $f(x)$:

$f(x) = \text{e}^{x} \times \text{e}^{x} - 3\text{e}^{x} + x + 2 = \text{e}^{x}\left(\text{e}^{x} - 3 + \dfrac{x}{\text{e}^{x}} + \dfrac{2}{\text{e}^{x}}\right)$. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\text{e}^{x}} = 0$, que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\text{e}^{x}} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{x} = +\infty$, d'où par somme et produit de limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et : $f'(x) = 2\text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} + 1$.

b. Développons $\left(2\text{e}^{x} - 1\right)\left(\text{e}^{x} - 1\right) = 2\text{e}^{2x} - 2\text{e}^{x} - \text{e}^{x} + 1 = 2\text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} + 1 = f'(x)$.

On a donc $f'(x) = 0 \iff \left(2\text{e}^{x} - 1\right)\left(\text{e}^{x} - 1\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\text{e}^{x} - 1 & = & 0 \\ \text{e}^{x} - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} 2\text{e}^{x} & = & 1 \\ \text{e}^{x} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \text{e}^{x} & = & \frac{1}{2} \\ \text{e}^{x} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \ln \frac{1}{2} \\ x & = & \ln 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\ln 2 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$

La dérivée s'annule donc aux points d'abscisse $-\ln 2$ et 0.

c. On obtient le signe de $f'(x)$, d'où les variations de f en construisant un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$2\text{e}^{x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\text{e}^{x} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** Une équation de la tangente est : $y = f\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] + f'\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]\left(x - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

Or $f\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \text{e}^{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - 3\text{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \text{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^2} - 3\text{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 3 - \ln 2 + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \ln 3 - \ln 2 + 2 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{4}$.

$f'\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] = 2\text{e}^{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - 3\text{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + 1 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 1 = 1$.

Une équation de T est donc :

$y = x + \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{4}$.

On remarque D et T ont le même coefficient directeur : elles sont parallèles.

b. Voir à la fin

c. On a vu que sur l'intervalle $[0 ; \ln 3]$ la fonction est positive, mais que la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de son asymptote ; donc l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$ est égale à l'intégrale de la fonction $-d(x)$:

$$\mathscr{A} = \int_0^{\ln 3} \left(-\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Une primitive de e^{2x} est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, donc

$\mathscr{A} = \left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} + \dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_0^{\ln 3} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 3} + 3\mathrm{e}^{\ln 3} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - 3\mathrm{e}^{0} = -\dfrac{1}{2} \times 9 + 9 + \dfrac{1}{2} - 3 = 2$ (u. a.).

Une unité d'aire valant $4 \times 4 = 16\ \text{cm}^2$, on a :

$\mathscr{A} = 16 \times 2 = 32\ \text{cm}^2$(ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).