Corrigé du baccalauréat STL Chimie de laboratoire
Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.
Le discriminant est inférieur à zéro donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}.$$

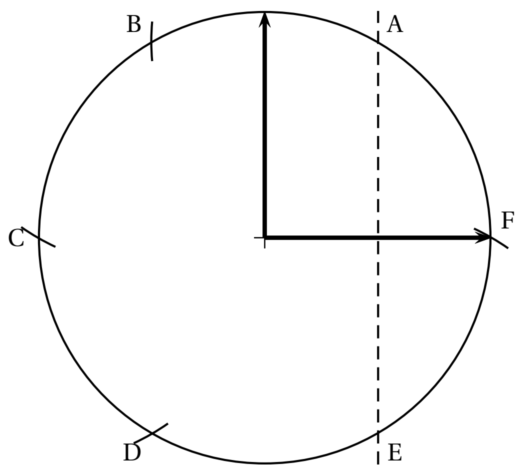
2. a. On a $|z_\text{A}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow |z_\text{A}| = 1$.
On reconnaît $z_\text{A} = \cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\frac{\pi}{3}$.
Donc $z_\text{A} = 1\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et comme $z_\text{E} = \overline{z_\text{A}}$, on a $z_\text{E} = 1\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. A et E sont les points communs au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Voir plus bas.

3. a. $z_\text{A} = 1\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_\text{B} = z_\text{A}^2 = 1^2\text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}} = 1\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$;
De même $z_\text{C} = 1^3\text{e}^{3\text{i}\frac{\pi}{3}} = \text{e}^{\pi} = -1$;
$z_\text{D} = 1^4\text{e}^{4\text{i}\frac{\pi}{3}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$;
$z_\text{F} = 1^6\text{e}^{6\text{i}\frac{\pi}{3}} = \text{e}^{2\text{i}\pi} = 1$.

b. Tous ces points ont des affixes de module 1 : ceci signifie que : OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1 ; les points A, B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle de centre O et de rayon 1.

c. Sur le cercle trigonométrique à partir de A on reporte le cercle de rayon 1 qui recoupe le cercle en B ; en répétant on obtient le point C puis le point D et enfin le point F est le point d'abscisse 1 sur le cercle trigonométrique



EXERCICE 2 **4 points**

1. a. Les solutions sont les fonctions $t \longmapsto C\text{e}^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$.

b. On doit avoir $C\text{e}^{-a\times 0} = 0,1 \iff C = 0,1$.
La fonction est donc définie par : $t \longmapsto 0,1\text{e}^{-at}$.

2. **a.** On doit avoir : $0,1 \times \mathrm{e}^{-9,9\times 10^{-3}t_{1/2}} = \dfrac{1}{2} \times 0,1$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien $-9,9 \times 10^{-3}t_{1/2} = \ln 0,05 \iff t_{1/2} = \dfrac{\ln 0,5}{-0,0099} \approx 70,01 \approx 70$ (min) à la minute près.

b. 10 % de la concentration initiale représentent le dixième de la concentration initiale 0,1, soit 0,01.

Graphiquement on trouve (droites en tiretés) un temps approximatif de 231 min soit 3 h 51 min.

PROBLÈME **11 points**

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0}(-2\ln x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Graphiquement ceci signifie que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro.

b. Comme $x \neq 0$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$f(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est dérivable sur I et $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $x - 2$.

f' s'annule en $x = 2$, est positive sur $]2~;~+\infty[$ et est négative sur $]0~;~2[$. D'où le tableau de variations de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a $f(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$ et $f'(1) = 1 - \dfrac{2}{1} = 1 - 2 = -1$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1 est :

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$, soit : $y = -x + 1$.

4. On a déjà $f(2) = 1 - 2\ln 2 \approx -0,4$;

$f(4) = 3 - 2\ln 4 \approx 0,2$;

$f(6) = 5 - 2\ln 6 \approx 1,4$.

a. D'après le tableau de variations, la fonction f est strictement croissante sur $]2~;~+\infty[$. Or $f(2) < 0$ et $f(4) > 0$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α sur $]2~;~4[$. Cette solution est bien entendu différente de 1.

b. On calcule $f(3) = 2 - 2\ln 3 \approx -0,2$ et comme au dessus on en déduit que $3 < \alpha < 4$.

5. Voir à la fin.

6. **a.** F est dérivable sur I et :

$F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x + 1 - 2\ln x - 2x \times \dfrac{1}{x} = x + 1 - 2\ln x - 2 = x - 1 - 2\ln x = f(x)$,

donc F est une primitive de f.

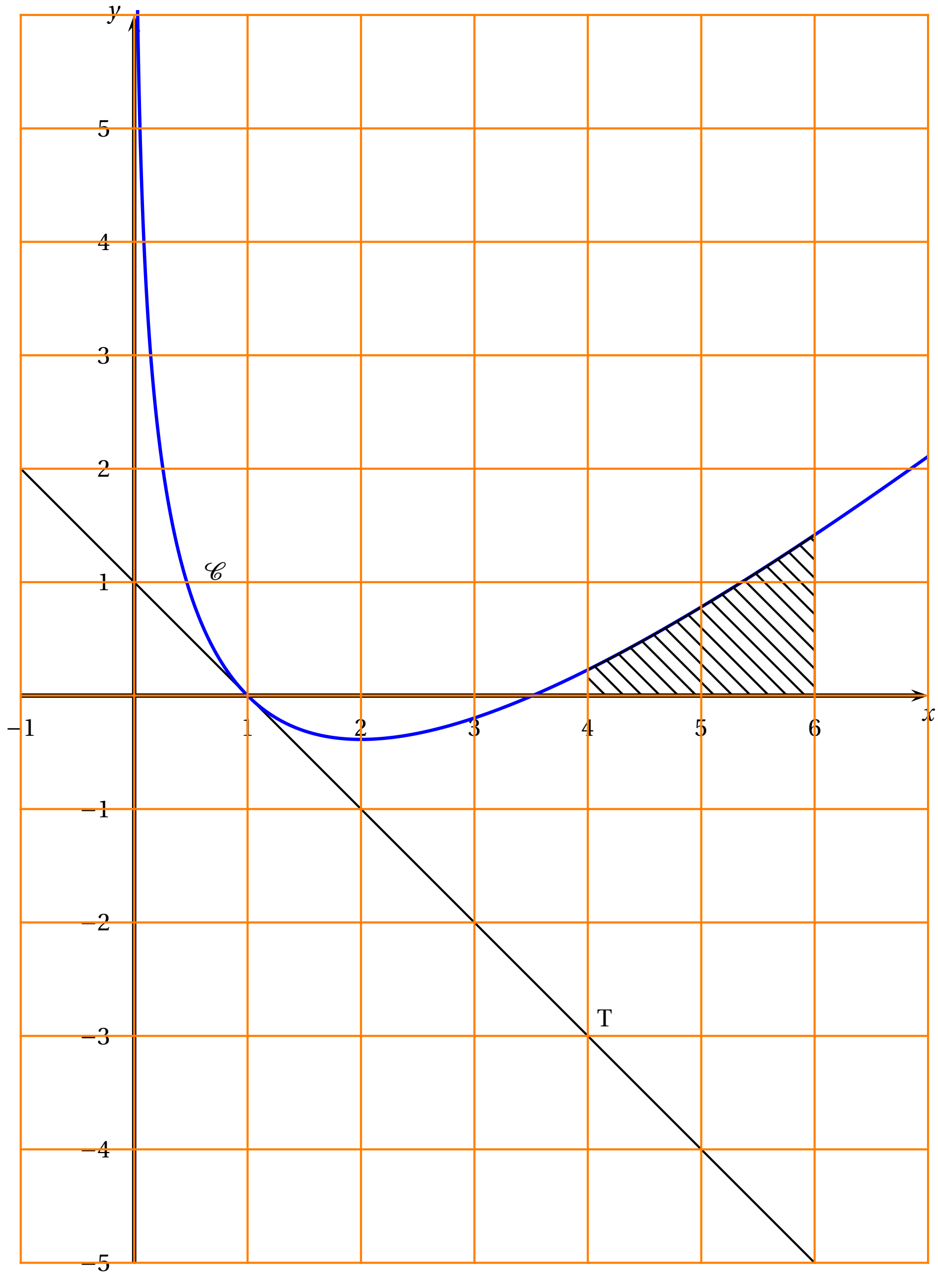
b. On sait d'après le tableau de variations et $\alpha < 4$ que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[4\,;\,6]$. Donc l'aire, en unité d'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_4^6 = F(6) - F(4) = \frac{1}{2}6^2 + 6 - 2\times 6\ln 6 - \left(\frac{1}{2}4^2 + 4 - 2\times 4\ln 4\right) =$
$18 + 6 - 12\ln 6 - 8 - 4 + 8\ln 4 = 12 - 2\ln 6 + 8\ln 4.$

L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm^2, donc :

$S = 4(12 - 2\ln 6 + 8\ln 4)$

On a $S \approx 6,356$ cm^2 soit 636 mm^2 au mm^2 près.



Courbe représentative de la fonction C