∽ Corrigé du baccalauréat STL septembre 2000 ∽
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Il y a donc en tout 24 secteurs. D'où le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$X = x_i$	-20	0	60	100
$p(X = x_i)$	$\dfrac{14}{24}$	$\dfrac{6}{24}$	$\dfrac{3}{24}$	$\dfrac{1}{24}$

b. $E(X) = -20\times\dfrac{14}{24}+0\times\dfrac{6}{24}+60\times\dfrac{3}{24}+100\times\dfrac{1}{24} = \dfrac{-280+0+180+100}{24} = \dfrac{0}{24} = 0$ (F).

Ce montant soit environ 8,33 F représente le gain moyen par partie sur un grand nombre de parties jouées. On dit que le jeu est équitable.

c. Calcul de la moyenne : $\overline{x} = \dfrac{-20+0+60+100}{4} = 35$.

D'où $V(X) = (-20-35)^2+(0-35)^2+(60-35)^2+(100-35)^2 = 3\,025+1\,225+625+4\,225 = 9\,100$.

Donc $\sigma(X) = \sqrt{9\,100} \approx 95$ F au franc près.

2. **a.** On a $20\times\dfrac{15}{100} = 3$ (F). Ce montant représente l'espérance mathématique minimale de la variable aléatoire X que l'on désire réaliser.

b. Il y a donc $10+n$ secteurs. Le tableau de la loi devient :

$X = x_i$	-20	0	60	100
$p(X = x_i)$	$\dfrac{n}{10+n}$	$\dfrac{6}{10+n}$	$\dfrac{3}{10+n}$	$\dfrac{1}{10+n}$

On a donc $E(X) = -20\times\dfrac{n}{24}+0\times\dfrac{6}{10+n}+60\times\dfrac{3}{10+n}+100\times\dfrac{1}{10+n} = \dfrac{-20n+0+180+100}{10+n} = \dfrac{280-20n}{10+n}$ (F).

c. On veut donc que $\dfrac{280-20n}{10+n} \geqslant 3 \iff 280-20n \geqslant 3(10+n) \iff 280-20n \geqslant 30+30n \iff 250 \geqslant 50n \iff 5 \geqslant n \iff n \leqslant 5$.

Il faut donc qu'il y ait au maximum 5 secteurs rouges.

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $\Delta = 16-4\times16 = -16\times3 = \left(4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$.

L'équation a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{4+4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

2. **a.** $P(-4) = 16+\left(5-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\times(-4)+4\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 16-20+4\mathrm{i}\sqrt{3}+4-4\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$.

$-4)$ est donc une racine de P.

b. On peut donc en déduire que $P(z) = z^2+\left(5-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+4\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = (z+4)(z+a) = z^2+(a+4)z+4a$.

Par identification des termes constants, on a $4\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 4a \iff a = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Donc $P(z) = (z+4)\left(z+1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

c. On a donc $P(z) = 0 \iff (z+4)\left(z+1-\text{i}\sqrt{3}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} z+4=0\\ z+1-\text{i}\sqrt{3}=0\end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{l} z=-4\\ z=-1+\text{i}\sqrt{3}\end{array}\right.$

3. a. $|z_{\text{A}}|^2 = 2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4+12 = 16 = 4^2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = 4$.

On peut écrire $z_{\text{A}} = 4\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Un argument de z_{A} est $\dfrac{\pi}{3}$.

Comme $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$, on a $|z_{\text{B}}| = 4$ et un argument de z_{B} est $-\dfrac{\pi}{3}$.

b. A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 et sur la droite d'équation $x = 2$.

z_{C} a pour module 4 et pour argument π.

c. On vient de voir que $|z_{\text{A}}| = |z_{\text{B}}| = |z_{\text{C}}| = 4 \iff$ OA = OB = OC = 4, les trois points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

d. $\text{AB}^2 = |z_{\text{B}}-z_{\text{A}}|^2 = \left|-4\text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 48$.

$\text{CA}^2 = |z_{\text{A}}-z_{\text{C}}|^2 = \left|2+2\text{i}\sqrt{3}+4\right|^2 = \left|6+2\text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 36+12 = 48$.

Comme A et B sont symétriques autour de l'axe des abscisses et que C appartient à cet axe on a CA = CB d'où $\text{CA}^2 = \text{CB}^2 = 48$.

On a donc $\text{AB}^2 = \text{CA}^2 = \text{CB}^2 = 48$: le triangle ABC est équilatéral.

PROBLÈME **10 points**

Partie I

1. Graphiquement on lit que $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

$f(0) = -3$ et $f'(0) = 0$.

2. Puisque $x \neq -1$, la fonction est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = -\dfrac{b}{(x+1)^2} - \dfrac{2c(x+1)}{(x+1)^4} = -\dfrac{b}{(x+1)^2} - \dfrac{2c}{(x+1)^3} = \dfrac{-b(x+1)-2c}{(x+1)^3} = \dfrac{-bx-b-2c}{(x+1)^3}$.

3. a. D'après l'écriture donnée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, or on a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$, donc $a = -2$.

b. On sait que $\left\{\begin{array}{l} f(0) = -3\\ f'(0) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -2+b+c = -3\\ -b-2c = 0\end{array}\right.$ d'où par somme des deux équations : $-2-c = -3 \iff c = 1$. Comme $b = -2c$, on en déduit finalement que $b = -2$.

On a donc $f(x) = -2-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Partie II

1. D'après la partie I, on a $f'(x) = \dfrac{2x+2-2}{(x+1)^3} = \dfrac{2x}{(x+1)^3}$.

Comme $x+1 > 0$, $(x+1)^3 > 0$: le signe de f'(x) est donc celui de $2x$, donc de x.

Sur $]-1\ ;\ 0[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante ;

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante.

D'où le tableau de variations de f suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	,+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

2. Le point commun a une ordonnée nulle ; il faut donc résoudre sur $]-1\,;\,+\infty[$, l'équation $-2-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=0 \iff \dfrac{-2(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^2}=0 \iff$ $-2x^2-2-4x-2x-2+1=0 \iff 2x^2+6x+3=0$.

Pour cette équation du second degré : $\Delta = 36-4\times 2\times 3=36-24=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2>0$, l'équation a deux solutions :

$$\frac{-6+2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{3}-3}{2}$$

Or $\dfrac{-\sqrt{3}-3}{2}<-1$, donc $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$.

3. Soit d la fonction définie par $d(x)=f(x)-(-2)=-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2(x+1)+1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$.

Comme $(x+1)^2>0$, le signe de la différence de $d(x)$ est celui du numérateur $-2x-1$.

$-2x-1>0 \iff -1>2x \iff x<-\dfrac{1}{2}$: donc sur $\left]-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de (D) ;

De même sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de (D)ce que l'on contrôle sur la figure.

4. On a vu que sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,3\right]$, $f(x)-(-2)<0$, donc $-2-f(x)>0$ et l'aire en unité d'aire de la surface est égale à l'intégrale :

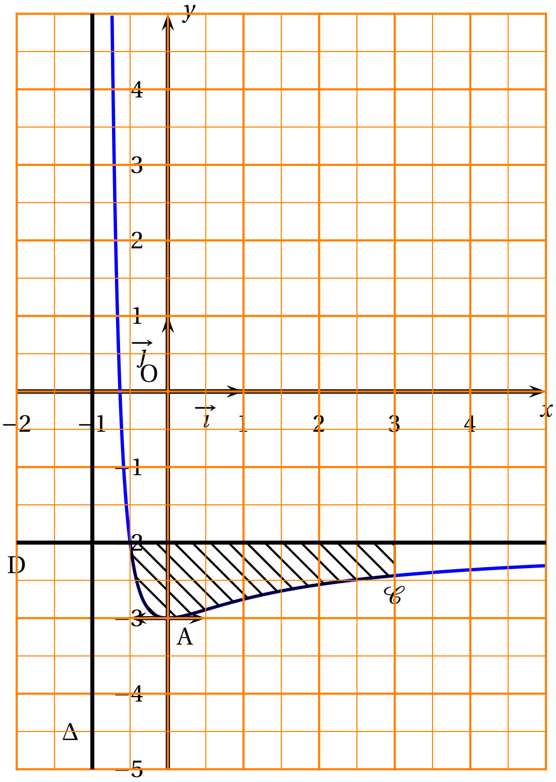
$\mathscr{A}=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{3}[-2-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{3}[\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]\,\mathrm{d}x.$

Une primitive de $\dfrac{2}{x+1}$ est $2\ln(x+1)$.

Une primitive de $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ est $-\dfrac{1}{x+1}$.

Donc $\mathscr{A}=\left[2\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{3}=\left[2\ln(3+1)+\dfrac{1}{3+1}\right]-\left[2\ln(-\frac{1}{2}+1)+\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1}\right]=$ $2\ln 4+\dfrac{1}{4}-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)-2=4\ln 2+\dfrac{1}{4}+2\ln 2-2=6\ln 2-\dfrac{7}{4}\approx 2{,}4$ (u. a.)

Résultat que l'on peut contrôler sur la figure.


y
x
O
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$
−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4
−5
D
A
$\mathscr{C}$
Δ