∽ Baccalauréat STL Métropole 17 juin 2011 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 3 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie A

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z)$ le nombre complexe défini par :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 24.$$

1. Calculer $P(2)$.
2. Déterminer des nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait

$$P(z) = (z-2)\left(z^2 + az + b\right).$$

3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$P(z) = 0.$$

Partie B

On note A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2 \quad ; \quad z_{\text{B}} = 3 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 3 - \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Placer ces trois points dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de z_{B}.

   b. En déduite le module et un argument de z_{C}.
3. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Les points A, B, C appartiennent à un même cercle. Donner son centre et son rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise produit et commercialise des articles destinés à l'industrie chimique.
Ces articles sont susceptibles de présenter au plus trois défauts.
On note X la variable aléatoire qui à tout article prélevé au hasard dans l'ensemble des articles produits, associe le nombre de défauts.

Partie A

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,917	$\cdots$	0,016	0,005

1. Compléter ce tableau en déterminant la valeur de $P(X=1)$.

2. **a.** Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calcule l'écart type de X.

Partie B

Le prix de vente d'un article est fixé à 350 €, son prix de fabrication est de 100 €.
Si l'article est défectueux, l'entreprise le répare avant sa mise sur le marché. Pour chaque défaut, le coût de réparation s'élève à 40 €.
Le bénéfice réalisé par l'entreprise sur la vente d'un article est alors égal au prix de vente de l'article diminué du prix de fabrication et de montant d'éventuelles réparations.

On note Y la variable aléatoire qui à tout article prélevé au hasard dans l'ensemble des articles produits, associe le bénéfice (en €) réalisé par l'entreprise lors de la vente de cet article.

1. Indiquer les quatre valeurs prises par la variable aléatoire Y.

2. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de Y.

3. Déterminer l'espérance mathématique de Y.

4. Donner une estimation du bénéfice que l'entreprise peut espérer faire sur la vente de 10 000 articles.

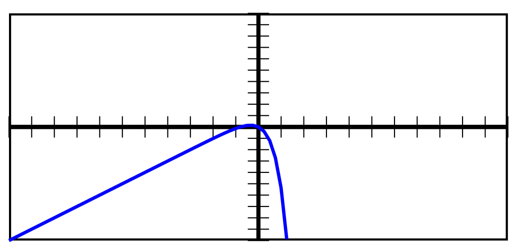
PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=1+x-\mathrm{e}^{2x}.$$

Partie A

Le graphique ci-contre est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice.



1. Au vu de ce graphique, dresser un tableau de variations possible de f sur $\mathbb{R}$.

2. Conjecturer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Les variations et le signe de f sur $\mathbb{R}$ sont-ils réellement ce qu'ils semblent être ? C'est à cette question que se propose de répondre la partie B.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on désigne par f' la fonction dérivée de f. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1-2\mathrm{e}^{2x}\geqslant 0$.
En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=1+\mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}-\mathrm{e}^{x}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

4. **a.** Dresser alors le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer la valeur exacte de son extremum.

   b. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-0,8\ ;\ 0,7]$ une unique solution α.

   c. Préciser la valeur exacte de $f(0)$ et une valeur approchée à 10^{-1} près de $f\left(-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

   d. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$.

5. Que peut-on dire de la conjecture envisagée à la fin de la partie A ?

6. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On note C la courbe représentative de f dans ce repère.
   Construire la portion de C correspondant à des abscisses x comprises entre $-1,5$ et $0,5$.

Partie C

On note P la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$ d'une part, l'axe des abscisses et la courbe C d'autre part.

1. Hachurer P sur le graphique réalisé à la question B. 6.
2. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'aire de P est égale à $\dfrac{4-\text{e}}{8\text{e}}$ unités d'aire.