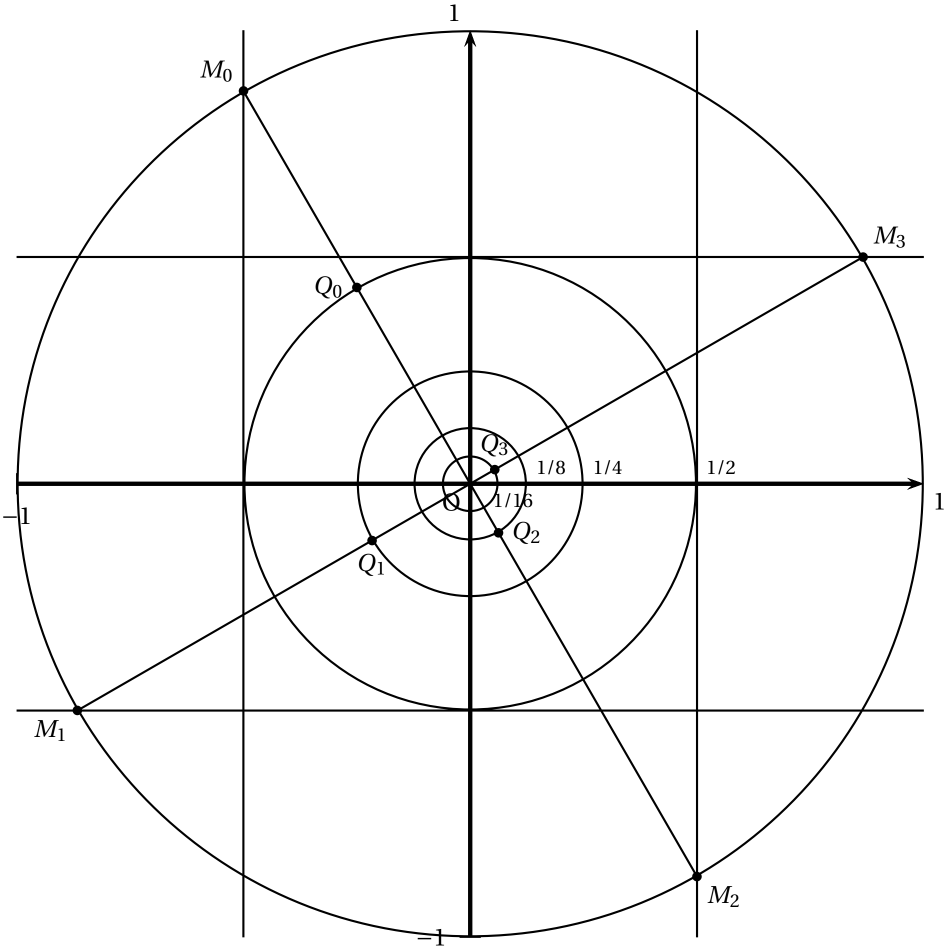
Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2000
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a donc $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Comme $z_0 = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ ‘son module est égal à 1 et un de ses arguments vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.
   $z_1 = z_0 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   Son module est égal à 1 et un de ses arguments vaut $-\dfrac{2\pi}{3}$.
   $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(\mathrm{i})^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{3)}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3)}\right) = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}$.
   Son module est donc égal à 1 et un de ses arguments à $-\dfrac{\pi}{3}$.
   $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.
   Son module est égal à 1 et un des ses arguments vaut $\dfrac{\pi}{6}$. On place les points grâce au cercle unitaire et aux droites d'équation $x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}$. Voir plus bas.
2. On a $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \mathrm{i}^{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \mathrm{i}^n \times \mathrm{i} = \mathrm{i}z_n$.
   Or $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc finalement :
   $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z_n$, égalité qui montre que le point M_{n+1} est l'image du point M_n dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. **a.** La suite (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
   On a donc $z_n = z_0 \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right)}$.
   Donc un argument de z_n est $\frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}$.
   b. Comme toutes les affixes ont le même module, deux points sont confondus s'ils ont le même argument (à 2π près).
   Donc $M_n = M_0 \iff \frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff \frac{n\pi}{2} = 0 + 2k\pi \iff n\pi = 0 + 4k\pi \iff n = 0 + 4k = 4k$.
   Conclusion : les points $M_0,\ M_4,\ M_8,\ M_{12},\ \ldots$ sont confondus.
4. **a.** On a $\omega_n = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\mathrm{i}^n = \dfrac{1}{2^n}z_n$.
   Ceci montre que ω_n et z_n ont le même argument, ou encore que les points O, M_n, et Q_n sont alignés.
   b. On utilise le résultat précédent mais en tracant des cercles dont les rayons sont à chaque fois deux fois plus petits.



EXERCICE 2 **4 points**

1. a. (E) peut s'écrire $y'' + \dfrac{1}{16}y = 0 \iff y'' + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 y = 0$.

On sait que les solutions de cette équation peuvent s'écrire :

$$y = A\cos\left(\frac{t}{4}\right) + B\sin\left(\frac{t}{4}\right),\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$$

b. On a $f'(t) = -\dfrac{1}{4}A\sin\left(\dfrac{t}{4}\right) + \dfrac{1}{4}B\cos\left(\dfrac{t}{4}\right)$.

Donc $\begin{cases} f(0) = 0,5 \\ f'(0) = 0,125 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0,5 \\ \dfrac{1}{4}B = 0,125 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0,5 \\ B = 0,5 \end{cases}$

On a donc $f(t) = 0,5\cos\left(\dfrac{t}{4}\right) + 0,5\sin\left(\dfrac{t}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{t}{4} + \sin\dfrac{t}{4}\right]$.

c. On a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left[\dfrac{1}{4}(t-\pi)\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\dfrac{t}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\dfrac{t}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right] =$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{t}{4}\right] = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{4} = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{t}{4} + \sin\dfrac{t}{4}\right] = f(t)$.

2. On sait quel que soit le réel t, $-1 \leqslant \cos\left[\dfrac{1}{4}(t-\pi)\right] \leqslant 1$, donc par produit par le réel positif $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a.

b. Il faut résoudre dans l'intervalle de temps $[0 ; 35]$ l'équation

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left[\frac{1}{4}(t-\pi)\right]=0 \iff \cos\left[\frac{1}{4}(t-\pi)\right]=0 \iff \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(t-\pi)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou}\\ \frac{1}{4}(t-\pi)=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}t-\pi=2\pi+8k\pi \text{ ou}\\ t-\pi=-2\pi+8k'\pi\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}t=3\pi+8k\pi \text{ ou}\\ t=-\pi+8k'\pi\end{array}\right.$$

Il faut donc $0\leqslant 3\pi+8k\pi\leqslant 35 \iff -3\pi\leqslant 8k\pi\leqslant 35-3\pi \iff$
$-\frac{3}{8}\leqslant k\leqslant\frac{35-3\pi}{8\pi}$. les seules valeurs possibles sont $k=0$ et $k=1$.

Deuxième possibilité : $0\leqslant -\pi+8k'\pi\leqslant 35 \iff \pi\leqslant 8k'\pi\leqslant 35+\pi \iff$
$\frac{1}{8}\leqslant k'\leqslant\frac{35+\pi}{8\pi}$.

La seule valeur possible est $k'=1$.

Finalement M se retrouve en O pour $t=3\pi,\ t=11\pi$ et $t=7\pi$.

PROBLÈME — 11 points

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $]0 ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle
$f'(x)=-\frac{2}{x}+2ax+b$.

Les deux conditions imposées se traduisent par :

$$\left\{\begin{array}{lcl}f(1)&=&-\frac{13}{2}\\ f'(1)&=&-6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}a+b&=&-\frac{13}{2}\\ -\frac{2}{1}+2a+b&=&-6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}a+b&=&-\frac{13}{2}\\ 2a+b&=&-4\end{array}\right. \Rightarrow$$

$a=-4+\frac{13}{2}=\frac{5}{2}$, puis $b=-\frac{13}{2}-a=-\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4$.

Donc $f(x)=-2\ln x+\frac{5}{2}x^2+4x$.

2. a. On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, ce qui géométriquement signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

b. En factorisant x^2, on peut écrire :
$f(x)=x^2\left(-2\frac{\ln x}{x^2}+\frac{5}{2}-\frac{9}{x}\right)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\frac{\ln x}{x^2}+\frac{5}{2}-\frac{9}{x}=\frac{5}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, par produit des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Partie B

1. a. Sur $]0 ;\ +\infty[$, $f'(x)=-\frac{2}{x}+5x-9$.

b. On a $f'(x)=\frac{-2+5x^2-9x}{x}$. Comme $x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur donc du trinôme $5x^2-9x-2$.

On a $\Delta=81+40=121=11^2>0$. Le trinôme a deux racines :
$\frac{9+\sqrt{121}}{10}=2$ et $\frac{9-\sqrt{121}}{10}=-0,2$. Il est positif sauf entre les racines

On a donc :

- sur $]0 ; 2[$, $f'x)<0$;
- sur $[2 ;\ +\infty[$, $f'(x)>0$;
- $f'(2)=0$.

c. On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ;\ +\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2. **a.** Sur l'intervalle f est croissante, $f(3) \approx -6,7$ et $f(4) \approx 1,2$, donc il existe un réel unique $x_0 \in]3~;~4[$ tel que $f(x_0) = 0$.

   b. La calculatrice donne $f(3,8) \approx -0,77$ et $f(3,9) \approx 0,2$, donc $x_0 \in]3,8~;~3,9[$.
   De même $f(3,87) \approx -0,09$ et $f(3,88) \approx 0,004$, donc $x_0 \in]3,87~;~3,88[$.

3. Une équation de D est : $y = f(1) + f'(1)(x-1)$.
   On sait que $f'(1) = -6$ et que $f(1) = -\frac{13}{2}$, donc une équation de D est :
   $y = -\frac{13}{2} - 6(x-1)$ soit $y = -6x - \dfrac{1}{2}$.

4. Voir plus bas.

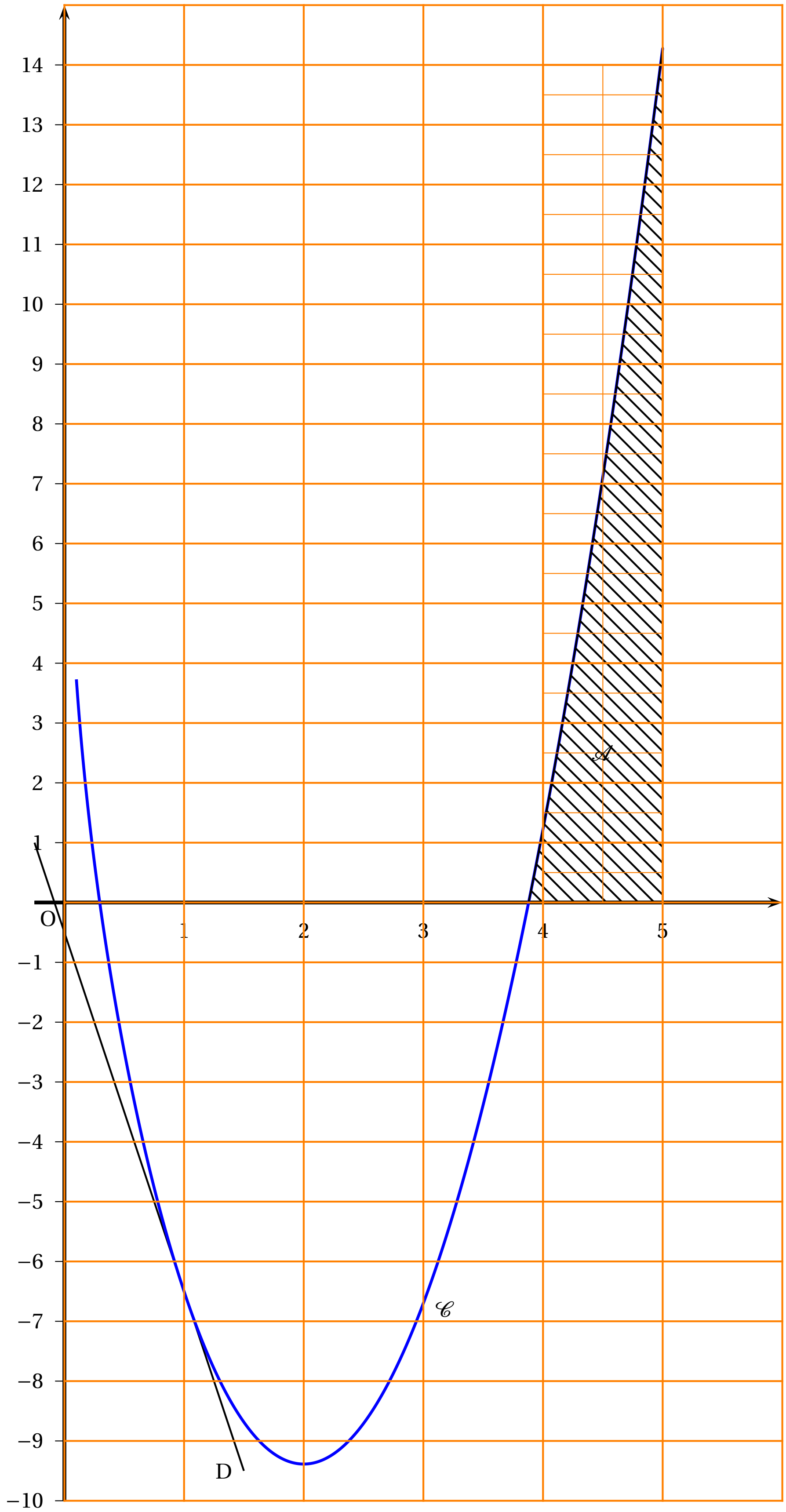
Partie C

1. g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

2. On en déduit aussitôt que g est une primitive de la fonction ln sur $]0~;~+\infty[$.
   Donc une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction f est la fonction F définie par :
   $F(x) = -2(x\ln x - x) + \dfrac{5}{2}\dfrac{x^3}{3} - 9\dfrac{x^2}{2} = -2x\ln x + 2x + \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{9x^2}{2}$.

3. **a.** Voir la figure à la fin.

   b. On a vu que sur $[x_0~;~5]$, $f(x) > 0$, donc l'aire A de la partie hachurée est égale à l'intégrale :
   $\text{A} = \displaystyle\int_{x_0}^{5} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_{x_0}^{5} = F(5) - F(x_0) =$
   $-2 \times 5\ln 5 + 2 \times 5 + \dfrac{5 \times 5^3}{6} - \dfrac{9 \times 5^2}{2} - \left(-2x_0 \ln x_0 + 2x_0 + \dfrac{5x_0^3}{6} - \dfrac{9x_0^2}{2}\right) =$
   $-10\ln 5 + 10 + \dfrac{325}{6} - \dfrac{225}{2} + 2x_0 \ln x_0 - 2x_0 - \dfrac{5x_0^3}{6} + \dfrac{9x_0^2}{2}$.
   En prenant comme valeur approchée de x_0, 3,88, on a
   $\text{A} \approx 7,40$ (u. a.) (résultat que l'on vérifie approximativement sur la figure)


14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
$\mathscr{A}$
$\mathscr{C}$
D