Corrigé du baccalauréat STL France juin 2002
Physique de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

1. L'équation s'écrit $u''_C(t) + 62500u_C(t) = 0$ ou $u''_C(t) + 250^2 u_C(t) = 0$, donc les solutions sont de la forme

$$u_{C(t)} = A\cos 250t + B\sin 250t \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$$

2. $u_C(0) = A = 15$;
$u'_{C(t)} = -250A\sin 250t + 250B\cos 250t$ entraîne $u'_C(0) = 250B = 0$, donc $B = 0$.
La solution u correspondante s'écrit $u_C(t) = 15\cos\omega t$, avec $\omega = 15$.

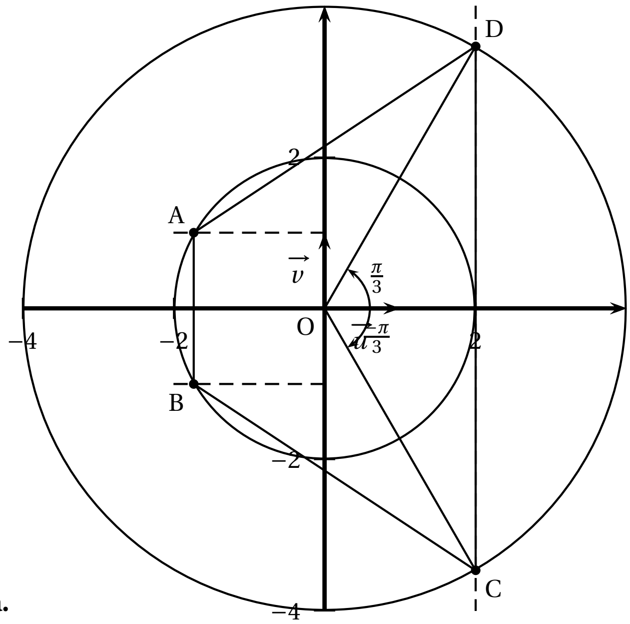
3. On sait que $I_m = \dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} i(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} Cu'_C(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{C}{t_1 - t_0}\left[u(t_1) - u(t_0)\right]$
soit avec les données numériques :
$I_m = \dfrac{16 \times 10^{-6}}{\frac{\pi}{250} - 0}\left[15\cos\pi - 15\cos 0\right] = -\dfrac{0,12}{\pi}$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. On notera :
On a $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2\mathrm{i})^2$.
Le discriminant est négatif : l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}{2} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \quad \text{et } z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

2. On a $|z_1|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$, donc $|z_1| = 2$. En factorisant ce module :
$z_1 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}}$;
$z_2 = \overline{z_1} = 2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}}$;
$z_1^2 = \left(2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 4\left(\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\frac{-\pi}{3}}\right)$;
$z_2^2 = \left(2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 4\left(\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{3}}\right) = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$.



3. a.

b. On sait que $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et d'autre part $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, donc $\left(\overrightarrow{OD}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui montre que le triangle OAD est rectangle en O

c. A et B d'une part, C et D d'autre part ont la même partie réelle, donc (AB) et (CD) parallèles à l'axe des ordonnées sont des droites parallèle ; le quadrilatère ABCD est un trapèze.

Comme A et B d'une part, C et D de l'autre sont symétriques autour de l'axe des abscisses, le segment [AD] a pour symétrique [CD], donc AD = BC. Conclusion : ABCD est un trapèze est un trapèze isocèle.

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

1. $1 + 2\ln x = 0 \iff 2\ln x = -1 \iff \ln x = -\dfrac{1}{2} \iff x = \hat{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}} \approx 0,607$ qui appartient bien à l'intervalle]0 ; 2[.

2. **a.** La fonction $g$est dérivable et $g'(x) = 1 - 2\ln x - 2x \times \dfrac{1}{x} = 1 - 2\ln x - 2 = -1 - 2\ln x = -(1 + 2\ln x)$.

On a $g'(x) > 0 \iff -(1+2\ln x) > 0 \iff 0 > 1 + 2\ln x \iff -1 > 2\ln x \iff -\dfrac{1}{2} > \ln x \iff \text{e}^{-\frac{1}{2}} > x \iff x < \text{e}^{-\frac{1}{2}}$.

On a vu que $1 + 2\ln x$ s'annule en $\hat{e}^{-\frac{1}{2}}$ et enfin $g'(x) < 0 \iff x > \text{e}^{-\frac{1}{2}}$.

Conclusion :

— sur $\left]0\,;\,\text{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$, $g'(x) > 0$;

— $g\left(\text{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$;

— sur $\left]\text{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,2\right[$, $g'(x) > 0$

b. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$\text{e}^{-\frac{1}{2}}$		2
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	$g\left(\text{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	↘	

La fonction a donc un maximum : $g\left(\text{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \text{e}^{-\frac{1}{2}} - 2 - 2\text{e}^{-\frac{1}{2}}\ln\left(\text{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \text{e}^{-\frac{1}{2}} - 2 + \text{e}^{-\frac{1}{2}} = 2\text{e}^{-\frac{1}{2}} - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{\text{e}}} - 2$.

c. La calculatrice livre $\dfrac{2}{\sqrt{\text{e}}} - 2 \approx -0,78$.

Le maximum étant inférieur à zéro, on en déduit que sur]0 ; 2[, $g(x) < 0$.

Partie B - Étude et représentation graphique de la fonction f

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-2)^2} = \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, d'où par produit des limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f au voisinage de zéro.

De même $\lim\limits_{x\to 2} \ln x = \ln 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2)^2} = +\infty$, d'où par produit des limites $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.
Ceci signifie que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f au voisinage de 2.

2. a. f est dérivable et par dérivation d'un quotient :
$$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times(x-2)^2 - 2(x-2)\ln x}{(x-2)^4} = \dfrac{\frac{(x-2)^2}{x} - 2(x-2)\ln x}{(x-2)^4} = \dfrac{\frac{(x-2)}{x} - 2\ln x}{(x-2)^3} = \dfrac{x-2-2x\ln x}{x(x-2)^3} = \dfrac{g(x)}{x(x-2)^3}.$$

b. Sur $]0\,;2[$, on a $x > 0$ et $0 < x < 2$ entraîne $-2 < x-2 < 0$ qui entraîne que $(x-2)^3 < 0$.

Il en résulte que le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $g(x)$; or on a vu à la partie A question 2. c. que $g(x) < 0$.

Conclusion sur $]0\,;2[$, la dérivée est positive et la fonction f est croissante de moins l'infini à plus l'infini

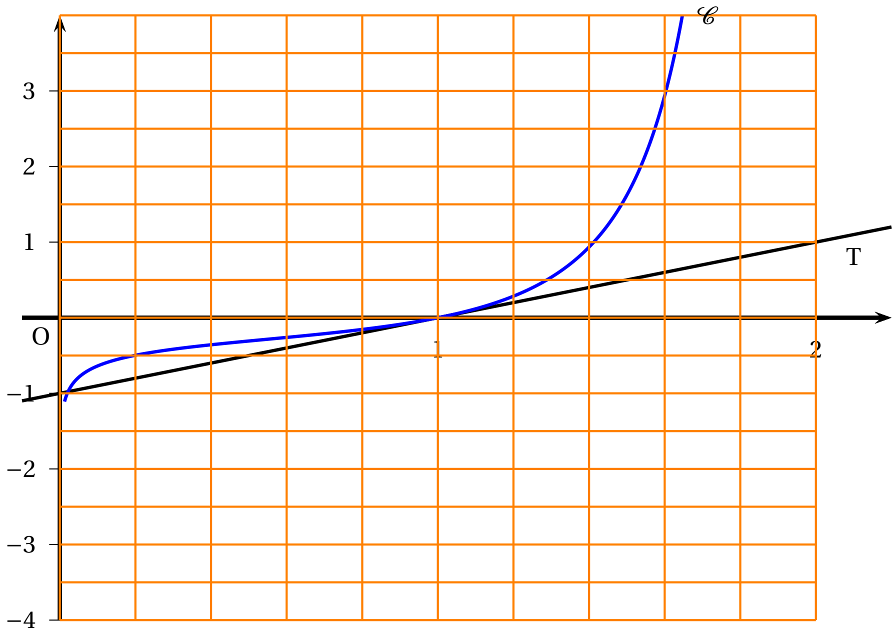
3. a. Une équation de T est $y = f(1) + (x-1)f'(1)$.
$f(1) = \dfrac{0}{1} = 0$ et $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1\times(-1)^3} = \dfrac{-1}{-1} = 1$.
Une équation de T est donc $y = x-1$.

b. Voir la figure plus bas.

Partie C - Calcul d'aire

1. La fonction F est dérivable sur $]0\,;2[$ et sur cet intervalle :
$$F'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(2-x)+\ln x}{(2-x)^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2-x} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x(2-x} + \dfrac{\ln x}{(2-x)^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-x-(2-x)}{x(2-x)}\right) = \dfrac{1}{x(2-x} + \dfrac{\ln x}{(2-x)^2} - \dfrac{1}{x(2-x} = \dfrac{\ln x}{(2-x)^2} = f(x).$$

2. On a vu que pour $x > 1$, la fonction est positive, donc l'aire de la partie du plan est égale, en unités d'aire à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme $F'(x) = f(x)$, F est une primitive de f, donc
$$\mathscr{A} = [F(x)]_1^{\frac{3}{2}} = F\left(\tfrac{3}{2}\right) - F(1) = \dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\left(\ln\tfrac{1}{2} - \ln\tfrac{3}{2}\right) = 2\ln\tfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 3 = \dfrac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 \text{ (u. a.).}$$
L'unité d'aire est égale $5\times 1 = 5$ cm^2, donc
$\mathscr{S} = 5\left(\dfrac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2\right) = \dfrac{15}{2}\ln 3 - 10\ln 2$.
La calculatrice donne au centième près :
$\mathscr{S} \approx 1{,}31$ cm^2.



𝒞
T
3
2
1
O
1
2
−1
−2
−3
−4