Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2001
Physique de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Avec $y(t) = \theta(t) - 20$, $y'(t) = \theta'(t)$.
La relation $\theta'(t) = k[\theta(t) - 20$ dévient $y'(t) = ky(t)$, donc $^{y}(t)$ est bien solution de l'équation différentielle $y' = ky$.
b. Cette équation linéaire du premier ordre a pour solutions les fonctions $t \longmapsto y(t) = C\mathrm{e}^{kt}$, $C \in \mathbb{R}$.
c. $y(t) = \theta(t) - 20 \iff \theta(t) = y(t) + 20 = C\mathrm{e}^{kt} + 20$, $C \in \mathbb{R}$.
Or on sait que $\theta(0) = 100$, d'où $100 = C + 20 \iff C = 80$.
Finalement : $\theta(t) = 80\mathrm{e}^{kt} + 20$.

2. **a.** $20 \text{ min} = \dfrac{20}{60}\text{h} = \dfrac{1}{3}\text{h}$.
Donc $\theta\left(\dfrac{1}{3}\right) = 80\mathrm{e}^{k\frac{1}{3}} + 20 = 60 \iff 80\mathrm{e}^{k\frac{1}{3}} = 40 \iff \mathrm{e}^{k\times\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien : $k \times \frac{1}{3} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff$
$k = 3\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times (-\ln 2) = -3\ln 2$.
Conclusion : $\theta(t) = 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} + 20$.
b. $30 \text{ min} = \dfrac{1}{2}\text{h}$. Donc $\theta\left(\frac{1}{2}\right) = 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)\frac{1}{2}} + 20 \approx 48$.
Au bout d'une demi-heure la température tombe (au degré près) à 48 °.
c. Il faut trouver t tel que :
$\theta(t) = 30 \iff 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} + 20 = 30 \iff 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} = 10 \iff$
$\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} = \dfrac{1}{8}$ soit par croissance de la fonction ln : $(-3\ln 2)t = -\ln 8$.
Or $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$, donc $(-3\ln 2)t = -\ln 8 \iff (-3\ln 2)t = -3\ln 2 \iff$ $t = 1$.
La température tombe à 30 ° au bout d'une heure.

EXERCICE 2 **5 points**

graphique 2 cm).

1. **a.** En remplaçant dans l'équation Z par $\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}$ on obtient :
$4 + 3 + 4\sqrt{3} - 1 - 2\mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right) - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\right] + 4\left(2 + \sqrt{3}\right) =$
$6 + 4\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}\right) - 2(4 + 3 + 4\sqrt{3} - +8 + 4\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} - 14 - 8\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} = 0$.
Le nombre complexe $\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}$ est solution de l'équation.
b. On sait que l'équation a déjà une solution complexe ; l'autre solution est donc la conjuguée de cette solution soit : $\left(2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i}$.
Rem. On pouvait également utiliser le fait que la somme des racines est égale à $-\dfrac{b}{a} = 2\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

2. **a.** Les deux points ont des affixes conjuguées : ils sont symétriques autour de l'axe des abscisses. Voir la figure à la fin.
b. $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}}{\left(2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i}} = \dfrac{\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\right]\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\right]}{\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\right]\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\right]} = \dfrac{\left[\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}\right]^2}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} =$
$\dfrac{4 + 3 + 4\sqrt{3} - 1 - 2\mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)}{4 + 3 + 4\sqrt{3} + 1} = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.

Or $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\left[3+2\sqrt{3}\right]\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\right]}{2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\right]} = \dfrac{6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6}{4-3} = \sqrt{3}$.

Finalement $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.

c. On a $\left|\dfrac{Z_2}{Z_1}\right|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$. Donc $\left|\dfrac{Z_2}{Z_1}\right| = 1$.

On sait que $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, donc un argument est $-\dfrac{\pi}{6}$.

d. Le résultat précédent peut d'exprimer par $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \iff Z_2 = Z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, ce qui signifie que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

3. a. On a $Z_3 = \dfrac{1}{2}\left(Z_1 + Z_2\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}+\mathrm{i}+2+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = 2+\sqrt{3}$.

b. A et B étant symétriques autour de l'axe des abscisses qui contient le point O, le triangle OAB est isocèle en O. C étant le milieu de la base [AB], la droite (OC) médiane est aussi hauteur du triangle OAB, donc OAC est un triangle rectangle en C.

4. a. On a $|Z_1|^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1$.

Or $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1 = 4+3+4\sqrt{3}+1 = 8+4\sqrt{3} = 4\left(2+\sqrt{3}\right)$, donc

$|Z_1| = \sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

D'autre part $Z_3 \in \mathbb{R}$ et désigne un réel positif : il est égal à son module : $Z_3 = 2+\sqrt{3}$.

b. On a vu que dans le triangle isocèle OAB, [OC] est à la fois médiane, hauteur et bissectrice de l'angle en O, donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.

On en déduit les lignes trigonométriques :

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{|Z_3|}{|Z_1|} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Problème **10 points**

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$

Les deux termes de cette somme sont positifs : donc sur $]0~;~+\infty[$ $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante.

2. $g(1) = 1^3 - 1 + \ln 1 = 0$, donc puisque la fonction est croissante :

— sur $]0~;~+\infty[$, $f(x) < 0$;

— $f(1) = 0$;

— sur $]1~;~+\infty[$ $f(x) > 0$.

Partie B

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$;

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = x - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = x - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^3 - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu à la question précédente.
Avec $f(1) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. On a $f(x) - h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right) = -\dfrac{\ln x}{x}$.
On a déjà vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - h(x)] = 0$.
Ceci signifie que les deux courbes sont asymptotes au voisinage de plus l'infini.

b. Comme $f(x) - h(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$ et comme $x > 0$, le signe de la différence est celui de $-\ln x$. Donc :

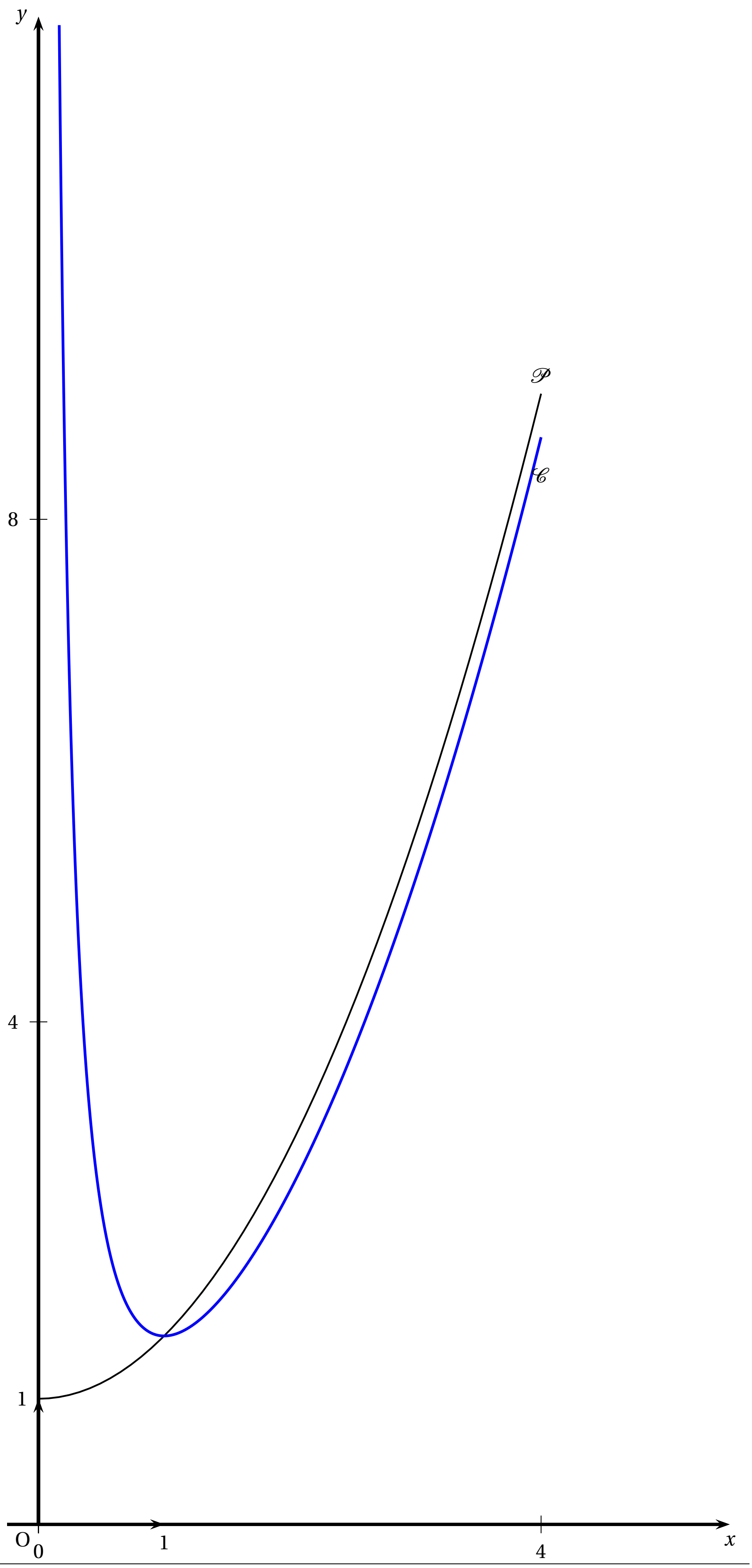
— si $-\ln x > \iff \ln x < 0 \iff x < 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$;
— si $-\ln x < \iff \ln x > 0 \iff x > 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{P}$;
— si $x = 1$, les courbes ont un point commun de coordonnées $\left(1~;~\frac{3}{2}\right)$.

4. Voir plus bas.

Partie C

1. En posant $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\dfrac{1}{x}\ln x$ est de la forme $u'u$ qui est la dérivée de $\dfrac{1}{2}u^2 = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
Une primitive de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\ln x$. sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

2. On sait que sur l'intervalle $[1~;~4]$, $f(x) > 0$, donc l'aire en unité d'aire de surface limitée par les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^4 (h(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^4 = \dfrac{1}{2}(\ln 4)^2 = 2(\ln 2)^2$. (u. a.)
Comme une unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2, l'aire est égale à :
$8(\ln 2)^2$. (cm^2) soit environ 3,84 cm^2.


y
8
4
1
O
0
1
4
x
$\mathscr{P}$
$\mathscr{C}$