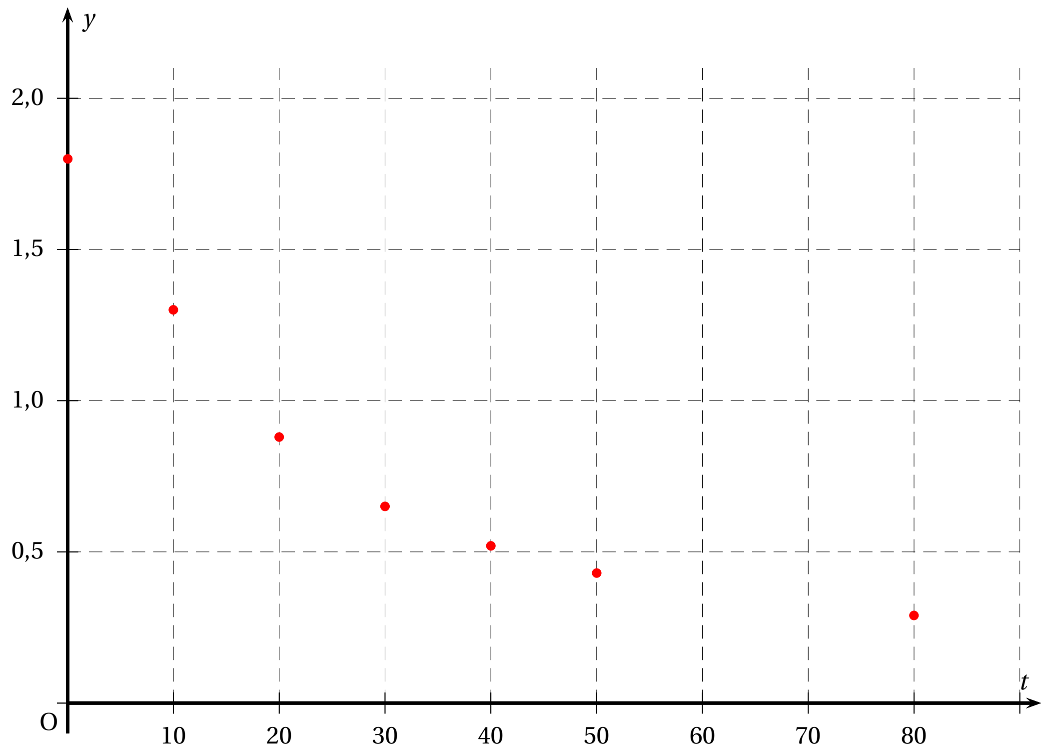
∽ Baccalauréat STL biotechnologies Antilles-Guyane 16 juin 2016 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Le tableau ci-dessous donne la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau (en cm^3/ml d'eau) à la pression de 1 bar, pour différentes valeurs de la température (en °C).

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
Solubilité y_i	1,8	1,3	0,88	0,65	0,52	0,43	0,29

Le nuage de points représentant cette série est donné par le graphique suivant :



1. La forme de ce nuage conduit à envisager un ajustement exponentiel de la série $(t_i\ ;\ y_i)$.

   On pose $z_i = \ln(y_i)$.

   Recopier **sur votre copie** et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les valeurs de z_i à 10^{-3} près.

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
$z_i = \ln(y_i)$							

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t de la série $(t_i\ ;\ z_i)$ par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à 10^{-3}.

3. Dans la suite, on retient pour droite d'ajustement la droite d'équation $z = -0,023t + 0,41$. Déduire de cette équation que la relation entre la solubilité y du dioxyde de carbone et la température t peut se modéliser sous la forme $y = A\mathrm{e}^{-0,023t}$ où $A = 1,51$ à 10^{-2} près.

4. En supposant que l'ajustement précédent est valable pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle $[0 ; 80]$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à la température de 65 °C.

EXERCICE 2 **(4 points)**

Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. L'évolution du nombre de bactéries, en fonction du temps, est étudiée dans un laboratoire où travaillent deux techniciens.

PARTIE A :

L'un des deux techniciens émet l'hypothèse que cette population augmente de 23 % toutes les heures. On modélise l'évolution du nombre de bactéries par (u_n) une suite de nombres réels.

1. Donner la valeur de u_0. Calculer u_1 et u_2 (arrondir les valeurs à l'entier le plus proche).
2. **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique de raison $1,23$.
3. **a.** Exprimer u_n en fonction de n.

   b. Calculer u_7 à l'entier près. Que représente ce nombre ?
4. Au bout de combien d'heures, selon l'hypothèse émise par ce technicien, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

PARTIE B :

Le deuxième technicien du laboratoire émet une hypothèse un peu différente et considère que le nombre de bactéries augmente de p % toutes les heures ($p \neq 23$). Pour déterminer au bout de combien d'heures, selon son hypothèse, le nombre de bactéries dépasse 500 000, il a réalisé l'algorithme suivant. Cependant, une partie de l'algorithme a été effacée, et on ne dispose que des premiers résultats affichés par celui-ci.

Algorithme	Résultats de l'algorithme
Variables : N est un nombre entier	
p et U sont des nombres réels	
Début :	$N = 0 \quad U = 50000$
Lire p	
N prend la valeur 0	$N = 1 \quad U = 63500$
U prend la valeur 50 000	
Tant que $U < \ldots\ldots$	
N prend la valeur......	$N = 2 \quad U = 80645$
U prend la valeur	$N = 3 \quad U = 102673,15$
Afficher la valeur de N	·
Afficher la valeur de U	·
Fin du tant que	·
Afficher N	·
Afficher U	·
Fin	·

1. En utilisant les premiers résultats affichés par l'algorithme, déterminer la valeur de p.
2. Sur votre copie, recopier l'algorithme figurant dans la colonne de gauche du tableau, et compléter les parties manquantes (repérées par des pointillés).
3. Au bout de combien d'heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

EXERCICE 3 **(5 points)**

PARTIE A : RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = 45.$$

1. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 20$.

PARTIE B : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(t) = -55\mathrm{e}^{-0,6t} + 75.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $(\mathscr{C})$?
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f.
   c. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré **à remettre avec la copie**.
   Unités graphiques : 1 cm en abscisse ; 2 mm en ordonnées.
3. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 70$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité).
4. Calculer $I = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}).
   Donner une interprétation graphique du résultat.

PARTIE C : UTILISATION DES RÉSULTATS

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Le principe de la haute pasteurisation consiste à chauffer dans un autoclave, pendant un laps de temps de 15 secondes, les aliments à une température comprise entre 70 °C et 75 °C.
Du lait dont la température initiale est de 20 °C est introduit dans un autoclave dont la température est constante et égale à 75 °C. La température du lait est donnée par la fonction f définie dans la partie B, où t est le temps en secondes.
Déterminer combien de temps, au total, le lait doit rester dans l'autoclave afin d'être pasteurisé.

EXERCICE 4 **(5 points)**

On étudie le taux de glycémie dans une population donnée, exprimé en g/L.

PARTIE A :

On suppose que le taux de glycémie est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,03$. On mesure la glycémie chez une personne choisie au hasard dans la population.

1. Justifier que la probabilité pour que la glycémie de cette personne soit comprise entre 0,94 et 1,06 a pour valeur approchée 0,95.

2. En déduire qu'une valeur approchée de $P(X \leqslant 1,06)$ est $0,975$. Justifier votre raisonnement.

3. Sachant que $P(X \geqslant 0,97)$ a pour valeur approchée $0,84$, en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(0,97 \leqslant X \leqslant 1,06)$.

PARTIE B :

Un médecin, qui ne connaît pas l'hypothèse émise dans la PARTIE A, souhaite estimer la proportion p inconnue des personnes de cette population dont le taux de glycémie est supérieur à $1,06$.
Il prélève au hasard un échantillon de 1 000 personnes dans la population étudiée.
Il constate que 29 personnes ont un taux de glycémie supérieur à 1,06.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p.

2. Le résultat précédent est-il cohérent avec la réponse à la question **A 2.** ? Justifier.

PARTIE C :

On admet que, dans la population étudiée, la probabilité qu'une personne ait un taux de glycémie supérieur à 0,99 g/L est $p_1 = 0,64$.
On tire un échantillon de 100 personnes au hasard. On suppose que la population est suffisamment importante pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise de 100 personnes. On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes dont la glycémie est supérieure à 0,99 g/L.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies. On appelle μ' la moyenne et σ' l'écart type de la loi normale Z approximant la loi binomiale Y .

2. Justifier que $\mu' = 64$ et $\sigma' = 4,8$.

3. Déterminer une valeur approchée de $P(Z \leqslant 78,4)$ à 10^{-2} près. On remarquera que $78,4 = \mu' + 3\sigma'$.

EXERCICE 5 **(3 points)**

QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.
Reporter sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$, et soit (C) sa représentation graphique dans un repère du plan. La tangente à la courbe (C) au point A(1 ; ln(4)) a pour coefficient directeur :

   a. $0,25$ **b.** $0,5$ **c.** 1 **d.** $\ln 4$

2. On considère deux variables aléatoires Y et Z.

   Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

   Z suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

   a. Y et Z ont la même variance.

   b. Y et Z ont la même espérance.

   c. La variance de Z est strictement inférieure à la variance de Y.

d. La variance de Z est nulle.

3. Une culture bactériologique comporte initialement 8 000 bactéries.

Leur nombre augmente de 20 % par heure.

Dans la copie de la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule peut-on rentrer en B3, puis recopier vers le bas, pour calculer le nombre de bactéries en fonction de l'heure ?

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	8 000
3	1	
4	2	

a. = B2 + 0,20 **b.** = 0,8 * B2 **c.** = 1,2 * B2 **d.** = 1,2 * B2.