Baccalauréat STL Biotechnologies

Nouvelle – Calédonie – 27 novembre 2020

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire,« type collège »est autorisé.

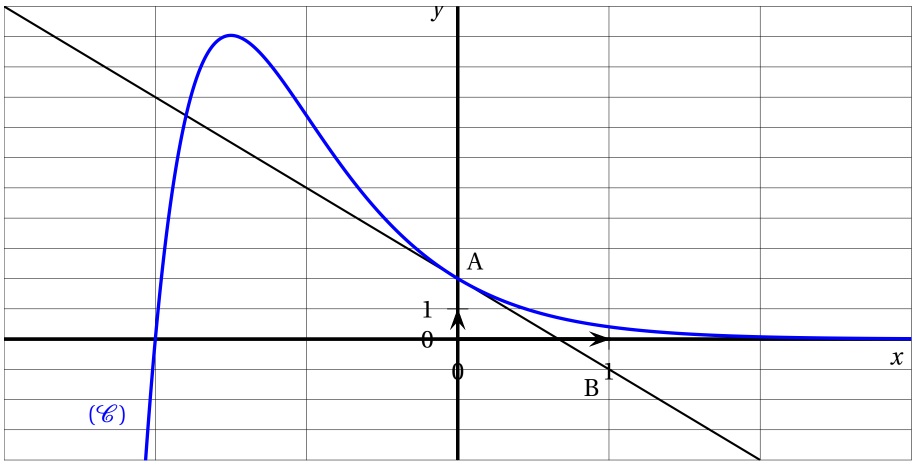
Exercice 1 — 4 points

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point ; une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point. Donner sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée et une seule réponse est attendue par question.

Dans les deux premières questions. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note f' sa fonction dérivée.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'origine O est donnée ci-dessous.
Soit les points A(0; 2) et B(1 ; −1). La droite (AB) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.



Question 1 :

$f'(0) =$

a. 2 **b.** -3 **c.** -1 **d.** $-\dfrac{3}{2}$

Question 2 :

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est :

a. $S = \{2\}$ **b.** $S = \{3\}$ **c.** $S = \{-2\}$ **d.** $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

Dans les deux questions suivantes on s'intéresse à la greffe de cornée en France. Les données utilisées portent sur l'année 2015 et sont extraites du bilan d'activité 2016 de l'agence de biomédecine sur le prélèvement, la greffe et l'inscription en attente de greffe.
47,6 % des inscrits en 2015 en Île-de-France ont reçu une greffe de cornée la même année. On choisit au hasard 100 inscrits en 2015. Ce choix est assimilable à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes greffées dans ce groupe. X suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,476$.
Les résultats sont arrondis à $0,001$ *près*

Question 3 :

La probabilité d'avoir au moins 40 personnes greffées est :

a. 0,077 **b.** 0,651 **c.** 0,948 **d.** 1,027

Question 4 :

Les conditions sont satisfaisantes pour approximer la loi de X par une loi normale d'une variable aléatoire Y.
$P(37 \leqslant Y \leqslant 58) \approx$

a. 0,038 **b.** 0,872 **c.** 0,853 **d.** 0,964

Exercice 2 5 points

Suite à un incident nucléaire, des traces de contamination ont été découvertes lors des contrôles réalisés de manière systématique à la sortie des zones nucléaires, notamment grâce au passage sous des portiques d'accès.
Le tableau ci-dessous donne les résultats fournis, heure par heure, par un appareil de mesure de la radioactivité. Les nombres entiers N_i représentent le nombre de particules recueillies par l'appareil en une seconde.

t_i en heures	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i)$ pour i entier variant de 0 à 6.
   Compléter, dans l'annexe 1 (**à rendre avec la copie**), le tableau donnant les valeurs de z_i arrondies au centième
2. Représenter le nuage de points de coordonnées $(t_i ; z_i)$ dans le repère orthogonal de l'annexe 1.
3. Donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t. On arrondira les coefficients à 10^{-3} près.

Dans la suite, on prendra pour équation de la droite de régression linéaire :

$$z = -0,48t + 5,12.$$

4. Représenter la droite de régression linéaire dans le repère précédent.
5. En déduire une expression de N en fonction de t.
6. L'appareil de mesure possède deux voyants (un rouge et un vert). Tant que le nombre de particules recueillies est strictement supérieur à 3, le voyant rouge est allumé. Lorsque le nombre de particules recueillies est inférieur ou égal à 3, le voyant rouge s'éteint et le voyant vert s'allume.
   Déterminer, par le calcul, le nombre d'heures nécessaires pour voir le voyant vert s'allumer.

Exercice 3 5 points

On introduit initialement 200 bactéries dans un milieu clos.
Dans cet exercice, on s'intéresse à l'évolution de la population de bactéries.

Partie A : un premier modèle

Au XVII^e siècle, Thomas Malthus propose un modèle décrivant l'évolution d'une population isolée connaissant le taux de natalité et le taux de mortalité.

On note u_n la population de bactéries présentes dans ce milieu n heures après l'introduction des bactéries. Ainsi $u_0 = 200$.
Selon le modèle proposé par Malthus, la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + au_n - bu_n$$

où a représente le taux de natalité et b représente le taux de mortalité de la population. Les réels a et b, étant des taux, sont compris entre 0 et 1.

On suppose que $a = 0,12$ et $b = 0,07$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = u_n + 0,12u_n - 0,07u_n.$$

1. **a.** Déterminer le nombre de bactéries 1 heure après le début de l'expérience.
   b. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $1,05$.
   c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. Compléter le tableau de valeurs de cette suite (premier tableau de l'annexe 2 à rendre avec la copie). Les résultats seront donnés à l'entier près.
3. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. Justifier la réponse.
   b. Ce modèle paraît-il réaliste ? Justifier la réponse.
4. Donner un exemple de taux de natalité a et de taux de mortalité b qui, selon le modèle de Malthus, amènerait la population à disparaitre. Justifier la réponse.

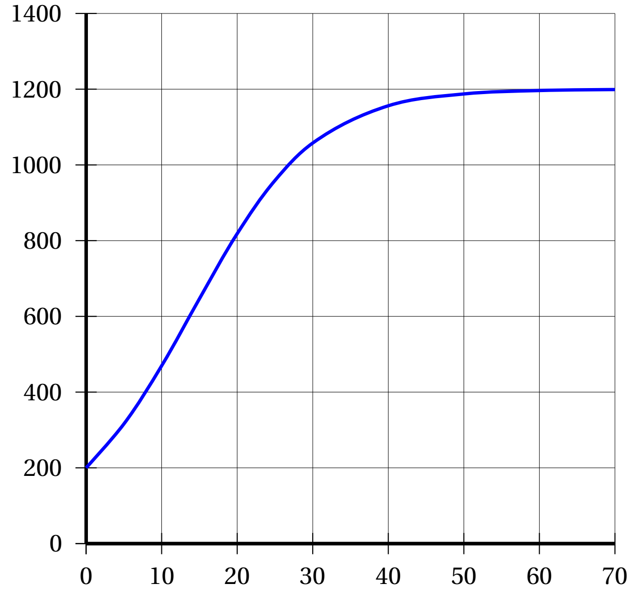
Partie B : un deuxième modèle

En 1840, Pierre François Verhulst propose un modèle différent selon lequel les taux de natalité et de mortalité dépendent de la population.
On note v_n la population de bactéries dans ce milieu n heures après l'introduction de $v_0 = 200$ bactéries, et on admet que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1,12v_n - 0,0001\,v_n^2.$$

1. On considère l'algorithme ci-dessous :
   a. Compléter le deuxième tableau de l'annexe 2 en exécutant cet algorithme à la main. Les résultats seront donnés à l'entier près.
   b. À la fin de son exécution, la variable N contient la valeur 34. Quel est le rôle de cet algorithme ?
   Comment peut-on interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
2. Le graphique ci-dessous donne la représentation des premiers termes de la suite (v_n).
   Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de cette population à long terme ?

Algorithme	Graphique

$V \leftarrow 200$
$N \leftarrow 0$
Tant que $V < 1\,100$
    $V \leftarrow 1,12 \times V - 0,000\,1 \times V^2$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
	

Exercice 4 **5 points**

Partie A : résolution d'une équation différentielle

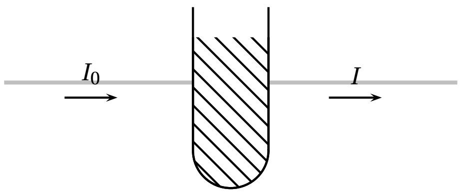
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad 5y' + 7,9y = 0$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$, qui vérifie la condition : $f(0) = 0,001$.

Partie B : loi de Lambert Beer

Un faisceau lumineux incident, d'intensité I_0, traverse une solution contenue dans un tube transparent. À la sortie du tube, l'intensité I du faisceau lumineux est mesurée par un détecteur.



La loi de Lambert Beer décrit l'intensité I du faisceau lumineux à la sortie en fonction de l'intensité du faisceau incident I_0, de la concentration c de la substance absorbante et de l'épaisseur d du milieu traversé par la lumière selon la relation :

$$I(c) = I_0\mathrm{e}^{-\epsilon d c} \quad \text{où } \epsilon \text{ est le coefficient d'extinction molaire du soluté.}$$

Initialement, la cuvette ne contient que du solvant ($c = 0$ mol.L^{-1}), on augmente la concentration de la substance en ajoutant du soluté de façon continue.
Dans cette expérience :

- l'épaisseur d du milieu traversé est de 1 cm
- le coefficient d'extinction molaire ϵ du soluté est de 1,58 L.mol^{-1}.cm^{-1}
- l'intensité du faisceau incident est $I_0 = 0{,}001$ W.sr^{-1} (Watt par stéradian)

1. Vérifier que la fonction l, fonction de la variable c, ainsi définie est la solution particulière de l'équation différentielle (E) déterminée dans la question 2 de la partie A.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $I(c) = 0{,}001\,\mathrm{e}^{-1{,}58c}$.

2. Étudier sur $[0\,;\,+\infty[$, les variations de la fonction I. Est-ce cohérent avec le contexte ? Justifier.

3. Déterminer la valeur exacte, puis arrondie à $0{,}01$ mol.L^{-1}, de la concentration c permettant de récupérer 75 % de l'intensité du faisceau incident à la sortie de la cuvette.

4. L'absorbance de la substance est définie par $A(c) = \ln\left(\dfrac{I_0}{I(c)}\right)$.

Donner, sous forme simplifiée, l'expression de l'absorbance en fonction de c.

Partie C : valeur moyenne

On admet que l'intensité moyenne du faisceau lumineux lorsque la concentration varie de 0,5 mol.L^{-1} à 1,3 mol.L^{-1} est égale à : $m = \dfrac{5}{4}\displaystyle\int_{0,5}^{1,3} I(c)\,\mathrm{d}c$.
Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près, de m.

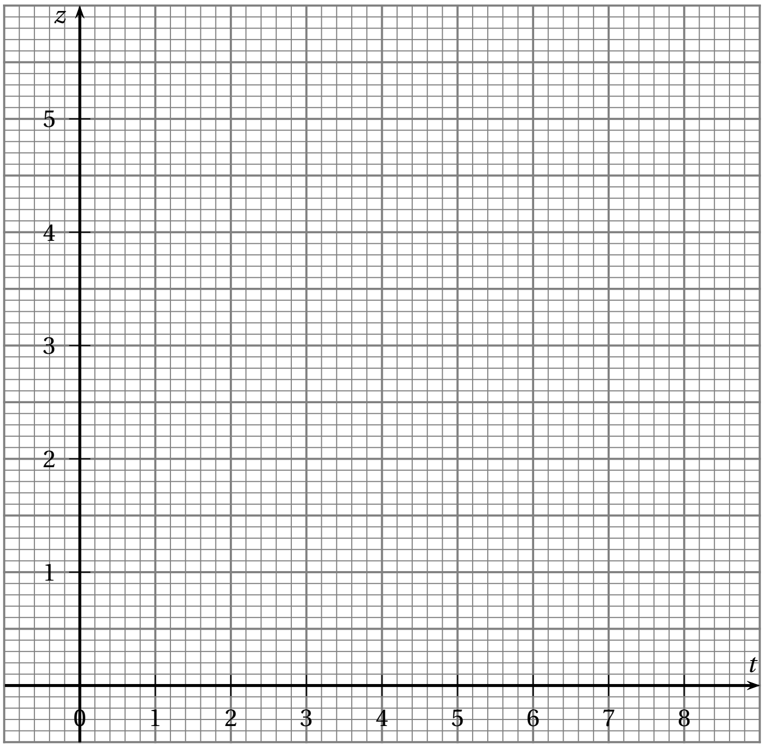
ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 2

Question 1

t_i en heures	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9
$z_i = \ln(N_i)$							

Questions 2. et 4.



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Partie A, question 2.

n	0	1	5	10	20	40	60	100
u_n								

Partie B, question 1. a.

V	200				
N	0	1	2	3	4