# Baccalauréat STL biotechnologies Métropole–La Réunion
# 8 septembre 2016

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

**EXERCICE 1** **4 points**

Une cuisson non juste de la viande de bœuf peut provoquer une intoxication alimentaire. Les bactéries en cause sont des souches d'*Escherichia coli*. Pour mieux prévoir les aptitudes de survie et de développement de cette bactérie dans les aliments, on étudie en fonction du temps la croissance de ces souches placées dans un milieu de culture. On appelle $C_i$ la concentration en bactéries en millions par mL. Voici les résultats obtenus :

| Temps $t_i$ en minutes | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration $C_i$ en millions par mL | 13 | 16 | 36 | 108 | 270 | 785 |

**1.** On pose $y_i = \ln(C_i)$.

**a.** Compléter le tableau de valeurs sur l'annexe 1, en arrondissant les résultats à $10^{-2}$.

**b.** Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal avec 1 cm pour 10 min en abscisses et 2 cm pour 1 unité en ordonnées.

**c.** Déterminer les coordonnées du point moyen $G$ du nuage en arrondissant l'ordonnée à $10^{-2}$ puis placer le point $G$ sur le graphique précédent.

**2.** On réalise un ajustement affine de ce nuage de points.

**a.** Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite $D$ d'ajustement de $y$ en $t$ obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à $10^{-4}$.

**b.** Tracer la droite $D$ sur le graphique de la question 1.

**3.** En déduire, selon ce modèle d'ajustement, la concentration en bactéries présentes dans le milieu de culture au bout de 4 heures. Donner le résultat arrondi au million de bactéries par mL.

**4.** Dans cette question, on considère que la concentration (en millions par mL) en bactéries présentes à l'instant $t$ (en minutes) dans le milieu de culture est donnée par

$$C(t) = 8,6\mathrm{e}^{0,0287t}.$$

Déterminer au bout de combien de temps cette concentration dépassera le milliard de bactéries par mL. Donner le résultat en heures et minutes, arrondi à la minute.

**EXERCICE 2** **4 points**

À l'Île de La Réunion, la variété d'ananas la plus cultivée est l'ananas Victoria.
L'exportation de cette variété d'ananas vers la métropole est en plein essor. Une coopérative réunionnaise se consacre exclusivement à l'exportation d'ananas Victoria vers la métropole.
Entre 2012 et 2015, la coopérative a augmenté ses exportations de 10,5 % par an, En 2015, les exportations ont atteint 1 100 tonnes.
Le but de cet exercice est d'étudier deux modélisations différentes de l'évolution de la quantité d'ananas Victoria exportés par cette coopérative.

**1.** Dans cette question, on s'intéresse à une première modélisation : on suppose qu'après 2015, les exportations vont continuer à progresser de 10,5 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique $(u_n)$ où pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$.
On a : $u_0 = 1\,100$.

**a.** Déterminer la quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016.

**b.** Déterminer en quelle année on peut prévoir que la quantité d'ananas exportés par cette coopérative dépassera 2 000 tonnes. On précisera la démarche utilisée.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**2.** Dans cette question, l'exportation des ananas est modélisée par la suite $(v_n)$, définie par : $v_0 = 1\,100$ et, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 0,7v_n + 477$ où $v_n$ est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$.

On considère l'algorithme ci-dessous :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $V$ nombre réel, $N, K$ entiers |
| **Entrée :** | Saisir $N$ |
| **Traitement :** | |
| | $V$ prend la valeur 1 100 |
| | Pour $K$ variant de 1 à $N$ |
| | $V$ prend la valeur $0,7 \times V + 477$ |
| | Fin pour |
| **Sortie :** | Afficher $V$ |

On saisit $N = 3$.

**a.** Quelle valeur est affichée par cet algorithme en sortie? Interpréter ce résultat en termes d'exportation d'ananas,

**b.** On dispose du tableau de valeurs suivant :

| $N$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_N$ | 1 508 | 1 576 | 1 588 | 1 589 | 1 590 | 1 590 |

Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite $(v_n)$ ?

3. Entre la modélisation proposée à la question 1 et celle proposée à la question 2, laquelle privilégier ? Pourquoi ?

**EXERCICE 3** **5 points**

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, on teste le fonctionnement d'une machine à embouteiller de l'eau. On désigne par $X$ la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production, associe le volume d'eau en litres qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, $X$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart type $\sigma = 0,01$.
On arrondira les probabilités au centième.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $P(X \leqslant 1,49)$.

**Une bouteille d'eau est conforme lorsqu'elle contient entre 1,48 et 1,52 litre d'eau.**

2. On prélève au hasard une bouteille d'eau de la production.
   **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que cette bouteille d'eau soit conforme aux normes de l'entreprise,
   **b.** Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calculatrice ?
3. Le directeur de l'usine souhaite que la proportion de bouteilles d'eau conformes soit égale à 97 %. Les techniciens effectuent un nouveau réglage de la machine à embouteiller et affirment que la proportion de bouteilles d'eau conformes est bien égale à 97 %. Un contrôle sur un échantillon de 500 bouteilles est effectué, pour juger de l'efficacité de ce réglage,
   **a.** Déterminer, en arrondissant les bornes à $10^{-3}$, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de bouteilles d'eau conformes dans un échantillon de taille 500.
   **b.** Parmi les 500 bouteilles de l'échantillon, on observe que 476 sont conformes.
   Cette observation remet-elle en question l'efficacité du réglage ? Justifier la réponse.
4. On veut mesurer la durée de bon fonctionnement de machines à embouteiller sur le point d'être livrées à l'usine.
   On désigne par $T$ la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard parmi les machines sur le point d'être livrées, associe sa durée de vie en jours avant une défaillance, On suppose que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans cette livraison prévue n'ait pas de défaillance avant l'instant $t$, exprimé en jours, est $p(T \geqslant t) = \text{e}^{-0,005t}$.
   **a.** Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne plus de 200 jours sans défaillance.
   **b.** Déterminer le réel $t$ pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne moins de $t$ jours sans défaillance soit égale à 0,2. Arrondir à l'unité.

**EXERCICE 4** **7 points**

On injecte un antibiotique en perfusion au rythme de 0,32 milligramme par minute. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction $f$.
Lorsque $t$ représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

**Partie A**

On admet que la fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,004y = 0,32,$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0~;~+\infty[$.
2. **a.** Quelle est la valeur de $f(0)$ ?
   **b.** En déduire une expression de $f(t)$ sur $[0~;~+\infty[$.

**Partie B**

On admet que la fonction $f$ est définie pour tout $t$ appartenant à $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80.$$

1. Calculer $f'(t)$, où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$. En déduire les variations de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

   On a tracé, dans le repère donné en annexe 2, la courbe représentative $C$ de la fonction $f$ et la droite $D$, asymptote à la courbe $C$ en $+\infty$.
2. Donner, à l'aide du graphique, la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. Cette valeur est appelée quantité limite de l'antibiotique présent dans le sang.
3. Le débit de perfusion est satisfaisant si 90 % de la quantité limite de l'antibiotique est, arrivée dans le sang au bout de 10 heures. Déterminer, de deux façons différentes, si le débit de perfusion est satisfaisant :
   **a.** À l'aide du graphique (on laissera apparents les traits de construction utiles sur l'annexe 2 à rendre avec la copie).
   **b.** Sans le graphique,
4. On admet que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à $\dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   **a.** Démontrer que la fonction $F$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$F(t) = 20\,000\mathrm{e}^{-0,004t} + 80t$$

   est une primitive de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

**b.** En déduire la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième. Quelle interprétation graphique peut-on donner de l'intégrale $I$ ?

**c.** Déterminer une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les 5 premières heures de perfusion.

**ANNEXES**
**À rendre avec la copie**

**Annexe 1 (exercice 1)**

| Temps $t_i$ en minutes | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,56 | | | | | |

**Annexe 2 (exercice 4) :** représentation graphique de la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80.$$