∽ Baccalauréat STL biotechnologies Nouvelle Calédonie ∾
26 novembre 2019

EXERCICE 1 **6 points**

Une certaine quantité de pénicilline est injectée dans le sang d'un patient.
On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.
On note t le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et $f(t)$ la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant t.
La fonction f, ainsi définie, est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0,04y.$$

Dans cet exercice, la quantité de pénicilline injectée est inconnue, mais on sait que le sang du patient contenait 3,03 mg de pénicilline, 40 minutes après injection.

Tous les résultats seront arrondis à $0,01$ *près.*

Partie A – Solution de l'équation différentielle

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) définies sur $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer l'unique solution f définie sur $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(40) = 3,03$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $f(t) = 15\,\text{e}^{-0,04t}$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Quelle est la quantité de pénicilline initialement injectée dans le sang du patient?
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
3. Déterminer, par le calcul, la durée pendant laquelle la quantité de pénicilline dans le sang sera strictement supérieure à 0,1 mg.

Partie C – Quantité moyenne de pénicilline

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	$f(t) = 15 * \exp(-0.04t)$ $\longrightarrow f(t) = 15\text{e}^{\frac{1}{25}t}$
2	Intégrale$(f, 0, 30)$ $\approx 262{,}05$

1. Démontrer, par le calcul, le résultat obtenu à la ligne 2.
2. La quantité moyenne de pénicilline dans le sang du patient pendant les 30 premières minutes peut être obtenue grâce à l'expression suivante :

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} f(t)\,\text{d}t$$

   Déterminer la quantité moyenne de pénicilline présente dans le sang du patient étudié lors des 30 premières minutes.

EXERCICE 2 **5 points**

Toutes les représentations graphiques seront réalisées sur l'annexe de la page 5.

Partie A – Présentation de l'étude

Un objet est vidéoprojeté, en trois dimensions, à une distance comprise entre 2 et 10 mètres. L'expérience, étudiée dans cet exercice, consiste à demander à une personne d'estimer la distance à laquelle se trouve l'objet. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Distance réelle en m (x_i)	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8	10
Distance perçue en m (y_i)	1,9	2,4	2,8	3,3	3,7	4,3	4,7	5	5,4	6

1. Quelle remarque peut-on faire sur la perception des distances ?
2. Représenter le nuage des points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ dans le repère en annexe, **à rendre avec la copie.**

Partie B – Étude d'un premier modèle : la loi de Stevens

1. On pose $t_i = \ln(x_i)$ et $z_i = \ln(y_i)$
   - **a.** Compléter le tableau donné en annexe. On arrondira les valeurs à 0,1 près.
   - **b.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$. Les coefficients a et b seront arrondis à 0,01 près.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer une relation entre y et x sous la forme $y = \alpha \mathrm{e}^{\beta t}$ où les coefficients α et β seront arrondis à 0,01 près.

   Dans la suite de cette partie, on prendra la relation :

   $$y = 1,25x^{0,72}$$

   Cette relation est appelée loi de Stevens.

   La courbe d'équation $y = 1,25x^{0,72}$ est donnée en annexe.
3. Selon ce modèle, déterminer la distance réelle, arrondie à 0,1 mètre, à laquelle serait placé un objet perçu à 7 m.

Partie C – Étude d'un second modèle : le modèle logarithmique inspiré de la loi de Fechner

Le modèle logarithmique propose une autre relation entre la distance perçue et la distance réelle. Dans la situation étudiée, on a :

$$y = 2,6\ln(x) + 0,1.$$

1. Tracer sur le repère de l'annexe, la courbe d'équation $y = 2,6\ln(x) + 0,1$.
2. Comparer les deux modèles. Argumenter votre réponse.
3. Selon ce modèle, déterminer la distance réelle, arrondie à 0,1 mètre, à laquelle serait placé un objet perçu à 7 m.

EXERCICE 3 **5 points**

La farine de blé est classée selon des « types » définis en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présents dans la farine.

Cette teneur en matière minérale est obtenue en brûlant de la farine et en rapportant la masse du résidu de cendres à la masse de farine brûlée.

Quelques exemples de types de farines sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T55	entre 0,5 et 0,6	farine blanche
T65	entre 0,62 et 0,75	farine bise
T80	entre 0,75 et 0,9	farine semi-complète
T110	entre 1 et 1,2	farine complète

L'exercice porte sur l'étude de la production de la **farine complète** d'une minoterie (établissement dans lequel sont préparées les farines de céréales).

Tous les résultats seront arrondis à 0,001 près.
Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment.*

Partie A – Loi normale

Soucieuse de la qualité de la production de sa **farine complète**, la minoterie décide de procéder à un contrôle du taux de cendres. Celui-ci consiste à choisir au hasard un paquet de farine, à en prélever 100 g, à le brûler et enfin à en mesurer la masse de cendres. Le paquet est considéré comme **conforme** si le taux de cendres est celui répertorié ci-dessus.

1. Montrer que le paquet de farine complète de la production est conforme si la masse du résidu de cendres est comprise entre 1 000 mg et 1 200 mg.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un prélèvement de 100 g d'un paquet de farine, associe la masse du résidu obtenu en mg. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 1 100 et d'écart-type 40.

   Déterminer la probabilité qu'un paquet pris au hasard dans la production de farine complète soit conforme.

3. La minoterie affirme que sa production ne contient pas plus de 5 % de paquets de farine complète non conformes. Or, lors d'un contrôle qualité sur un échantillon de 150 paquets, on observe 10 paquets de farine complète non conformes.

   a. Indiquer si les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont satisfaites.

   b. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de paquets de farine complète non conformes dans un échantillon de 150 paquets prélevés.

   c. Énoncer la règle de décision sur l'hypothèse selon laquelle 5 % des paquets de farine complète de la minoterie sont non conformes.

   d. Conclure sur l'affirmation de la minoterie.

Partie B – Loi binomiale

On admet que 5 % des paquets de la production de farine complète ne sont pas conformes. On choisit, au hasard, un lot de 100 paquets de farine complète dans la production. On admet que la production est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 100 paquets.
On note X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 paquets de type T110, associe le nombre de paquets non conformes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 paquets non conformes.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 96 paquets conformes.

4. **a.** Calculer $P(X \leqslant 3)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   b. En déduire $P(X \geqslant 4)$.

EXERCICE 4 **4 points**

La consommation finale brute d'énergie représente la consommation totale d'énergie sur une année, elle est exprimée en tonnes-équivalent-pétrole : TEP.

En France, la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie a progressé selon les données du tableau ci-contre :

	2015	2016
Part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie (en %)	15,2	16,52

La directive 2009/28/CE du Parlement européen relative à la promotion de l'utilisation de l'énergie produite à partir de sources renouvelables définit pour chaque pays de l'Union européenne l'objectif à atteindre concernant la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie.
L'objectif de la France est d'atteindre une part d'énergies renouvelables dans la consommation finale brute de 30 % en 2023.

Tous les résultats seront arrondis à 0,01 près.

Partie A – Modélisation à partir de 2015

À partir de 2015, la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie augmente environ de 8,7 % par an.
On désire modéliser la situation par une suite (u_n), u_n représentant la part des énergies renouvelables en $(2015+n)$. Ainsi $u_0 = 15,2$.

1. **a.** Justifier que $u_1 \approx 16,52$.

   b. Calculer u_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Justifier que la suite est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

3. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie en 2020.

5. **a.** Déterminer à partir de quelle année la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie dépassera 30 % (justifier en explicitant la méthode utilisée).

   b. L'objectif fixé à la France par cette directive est-il atteint ? Justifier votre réponse.

6. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du terme de la suite (u_n) correspondant à l'année 2038.

   b. Que peut-on en déduire sur la viabilité de ce modèle à long terme ?

Partie B – L'objectif pour 2035

L'objectif fixé par l'Union européenne est qu'en 2035 la part des énergies renouvelables soit de 40 %. On estime qu'à partir de 2015 la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie doit augmenter de 28 % **tous les cinq ans**.
On considère l'algorithme suivant :

$u \leftarrow 15,2$
Pour n allant de 1 à 4
    $u \leftarrow u \times 1,28$
Fin Pour

1. Quelle est la valeur de la variable u à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

2. Interpréter ce résultat compte tenu de l'objectif fixé pour la France en 2035.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Partie B, question **1.a.**

$t_i = \ln(x_i)$	0,7	0,9	1,1	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3
$z_i = \ln(y_i)$										

Partie A, question 2.

Partie C, question 1.