Baccalauréat STL biotechnologies 15 juin 2017 Polynésie

EXERCICE 1 **4 points**

On injecte un médicament à un patient. Le tableau suivant donne la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans son sang à différents instants.

Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	$-2,50$									

1. Compléter la dernière ligne du tableau en annexe 1. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2}.
2. Tracer, sur du papier millimétré, le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal d'unités à 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés.

   Déterminer une équation de cette droite sous la forme $y = at + b$. Les valeurs de a et b seront arrondies à 10^{-3}.

Dans la suite, on retient comme droite d'ajustement la droite Δ *d'équation :* $y = -0,2t - 2,3$.

4. Tracer la droite Δ sur la feuille de papier millimétré précédente.
5. Déterminer graphiquement la concentration au bout de 11 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} millimoles par litre.
6. Justifier que la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans le sang du patient à l'instant t peut être modélisée par $C(t) = 0,1\mathrm{e}^{-0,2t}$.
7. Au bout de combien d'heures la concentration sera-t-elle inférieure ou égale à 10^{-3} millimoles par litre ? On arrondira le résultat à l'heure.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise produit 30 tonnes de déchets non recyclables en 2015. Chaque année, l'entreprise veut diminuer la masse de déchets non recyclables de 3 % par rapport à l'année précédente.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on note p_n la masse de déchets non recyclables à l'année $2015 + n$.

1. Justifier que $\left(p_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme p_0 et la raison.
2. Exprimer p_n en fonction de n.
3. Quelle est la masse de déchets non recyclables en 2026 ? On donnera la valeur arrondie au kilogramme.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :
u et S réels
Initialisation :
u prend la valeur 30
S prend la valeur 30
Traitement :
Pour i allant de 1 à 5
        u prend la valeur 0,97 × u
S prend la valeur S + u
Fin Pour
Sortie
Afficher S
```

a. Indiquer, dans le tableau fourni en annexe 2 et à rendre avec la copie, les valeurs successives prises par les variables u et S lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt. Les valeurs seront arrondies à 10^{-2}.

b. Quelle valeur sera affichée en sortie de cet algorithme ? Que représente-t-elle ?

5. **a.** Compléter l'algorithme donné en annexe 2 afin de déterminer en quelle année la somme de tous les déchets non recyclables cumulés depuis l'année 2015 dépassera 300 tonnes.

b. Déterminer alors l'année où la somme de tous les déchets non recyclables cumulés depuis l'année 2015 dépassera 300 tonnes.

EXERCICE 3 **5 points**

On étudie le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On modélise cette situation par une fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ qui à chaque instant t (exprimé en heures) associe le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte à cet instant.

On admet que pour tout réel t de $[0~;~+\infty[$,

$$f(t) = 1200 - 1000\mathrm{e}^{-0,04t}.$$

Dans le repère orthogonal donné en annexe 3, on a tracé la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f.

1. La courbe $(\mathscr{C})$ donnée en annexe 3 suggère l'existence d'une asymptote horizontale.

Donner une équation de cette asymptote et justifier ce résultat par un calcul de limite.

On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$.

2. **a.** En utilisant le graphique de l'annexe 3, déterminer le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte au bout de 40 heures. On fera apparaître les traits de construction utiles.

b. Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures le nombre d'individus, en milliers, initialement présents dans l'enceinte aura été multiplié par 5.

3. On appelle vitesse d'évolution du nombre d'individus à l'instant t, exprimée en nombre d'individus en milliers par heure, le nombre $f'(t)$.

a. Pour tout réel t positif ou nul, calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} de la vitesse d'évolution du nombre d'individus, en milliers par heure, à l'instant $t = 50$ heures.

c. On appelle (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 50.

Tracer cette tangente sur le graphique donné en annexe 3 à rendre avec la copie. On expliquera la méthode employée.

d. La vitesse d'évolution du nombre d'individus, en milliers par heure, diminue au cours du temps.

Comment cela se traduit-il sur le graphique de l'annexe 3 ?

EXERCICE 4 **7 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Une entreprise fabrique en grand nombre des flacons destinés à contenir un parfum. Un flacon est non conforme s'il ne répond pas au cahier des charges défini par l'entreprise.

PARTIE A

On note E l'évènement « un flacon prélevé au hasard dans la production d'une journée est non conforme ». La probabilité de cet évènement est égale à $0,07$.

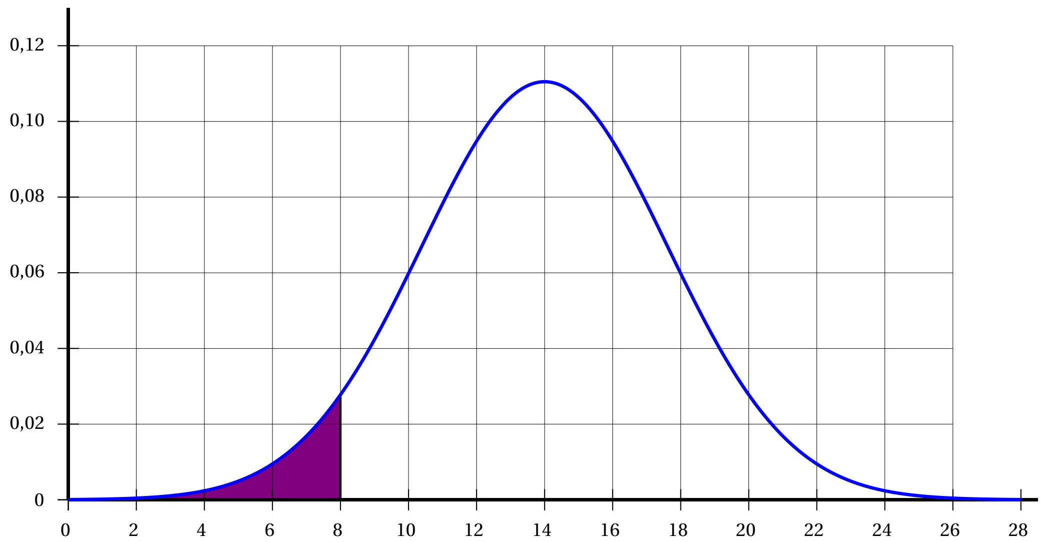
On prélève au hasard 200 flacons dans la production de cette journée, suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 flacons pris au hasard dans la production, associe le nombre de flacons non conformes dans ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, dix flacons soient non conformes.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.
4. Calculer l'écart type de la variable aléatoire X.

PARTIE B

On décide d'approcher la loi binomiale suivie par X par la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 3,61$. On considère une variable aléatoire Y suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de μ et σ.
2. En utilisant la loi de Y, déterminer la probabilité qu'un prélèvement de 200 flacons contienne au moins 15 flacons non conformes.
3. On a représenté ci-dessous dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 3,61$.



L'aire du domaine grisé arrondie à 10^{-3} vaut $0,048$ unité d'aire.

Déterminer les probabilités $P(Y \geqslant 20)$ puis $P(8 \leqslant Y \leqslant 20)$.

PARTIE C

L'entreprise affirme à ses clients que 93 % des flacons sont conformes. Une enseigne de parfumerie décide d'acheter une grande quantité de flacons.

1. Cette enseigne souhaite vérifier l'affirmation de l'entreprise sur la qualité des flacons. Pour cela, elle prélève un échantillon de 400 flacons au hasard dans une livraison.

a. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des flacons conformes dans un échantillon de 400 flacons.

b. L'enseigne de parfumerie constate que 36 flacons de l'échantillon ne sont pas conformes.

Ce résultat remet-il en question la confiance de cette enseigne de parfumerie envers son entreprise ?

2. On cherche à déterminer la taille N des échantillons à partir de laquelle l'intervalle de fluctuation asymptotique a une longueur inférieure ou égale à $0,02$.

a. Écrire, en fonction de n, un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de flacons conformes dans un échantillon de n flacons puis vérifier que la longueur de cet intervalle est $2 \times 1,96\sqrt{\dfrac{0,93 \times 0,07}{n}}$.

b. Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu les informations suivantes :

1	$2 * 1,96 * \text{sqrt}((0,93 * 0,07)/x) <= 0,02$ $2 \cdot 1,96\sqrt{\dfrac{0,93 \times 0,07}{x}} \leqslant 0,02$
2	$2(1,96)\text{sqrt}((0,93(0,07))/x) \leqslant 0,02$ Résoudre : $\left\{x \geqslant \dfrac{1\,563\,051}{625}\right\}$
3	$1\,563\,051/625$ $\approx 2\,500,88$

Utiliser les résultats obtenus pour en déduire la valeur N cherchée.

ANNEXE 1 : Exercice 1 (à rendre avec la copie)

Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	$-2,50$									

ANNEXE 2 : Exercice 2 (à rendre avec la copie)

4. a.

Étape i	u	S
1	29,10	59,10
2	28,23	87,33
3		
4		
5		

5. a.

Variables :
n entier naturel
u et S réels
Initialisation :
u prend la valeur 30
S prend la valeur 30
n prend la valeur 0
Traitement :
....
    u prend la valeur $0,97 \times u$
    S prend la valeur $S + u$
    n prend la valeur ...
......
Sortie
Afficher ...

ANNEXE 3 : Exercice 3 (à rendre avec la copie)