∽ Baccalauréat STL Biochimie-Génie biologique ∽
Métropole septembre 2006

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures   Coefficient : 2

EXERCICE 1   **10 points**

Les deux parties sont indépendantes

Une population de bactéries diminue en fonction du temps sous l'effet d'un antiseptique. On va chercher à modéliser l'évolution de cette population à l'aide de résultats expérimentaux obtenus ci-dessous. Le temps t est donné en minutes, $N(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t et $N'(t)$ est la vitesse de variation de cette population à la date t, c'est en fait la dérivée de $N(t)$.

t	0	2	4	6	8	10
$N(t)$	12 000	8 000	5 400	3 600	2 500	1 650
$N'(t)$	-2400	-1600	-1070	-730	-480	-340

Partie A

1. Calculer à chaque date t le rapport $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$ à 0,001 près. Calculer la moyenne arithmétique des résultats obtenus.
2. Résoudre l'équation différentielle $N'(t) = -0,2N(t)$ sachant que $N(0) = 12000$.
3. Estimer la population au bout de 15 minutes, en utilisant ce modèle.

Partie B

1. En utilisant le tableau initial, reproduire et compléter ce tableau dans lequel la fonction logarithme népérien (on donnera les valeurs arrondies à 0,01) :

t_i	0	2	4	6	8	10
$y_i = \ln(N(t_i))$	9,39					7,41

2. Représenter graphiquement le nuage de points correspondant $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ (unités : 1 cm pour 1 minute en abscisse et 1 cm pour 1 unité en ordonnée).
3. **a.** On appelle G le point moyen des trois premiers points et G′ le point moyen des trois derniers. Calculer à 0,01 près les coordonnées de G et G′.

   b. Placer G et G′ sur le graphique et tracer la droite (GG′).

   c. Trouver par le calcul, l'équation de la droite (GG′), en arrondissant à 0,01 près les résultats.
4. **a.** En déduire, en utilisant le modèle d'estimation donné dans le 3. c., que $N(t) = \mathrm{e}^{-0,2t}\mathrm{e}^{9,39}$.

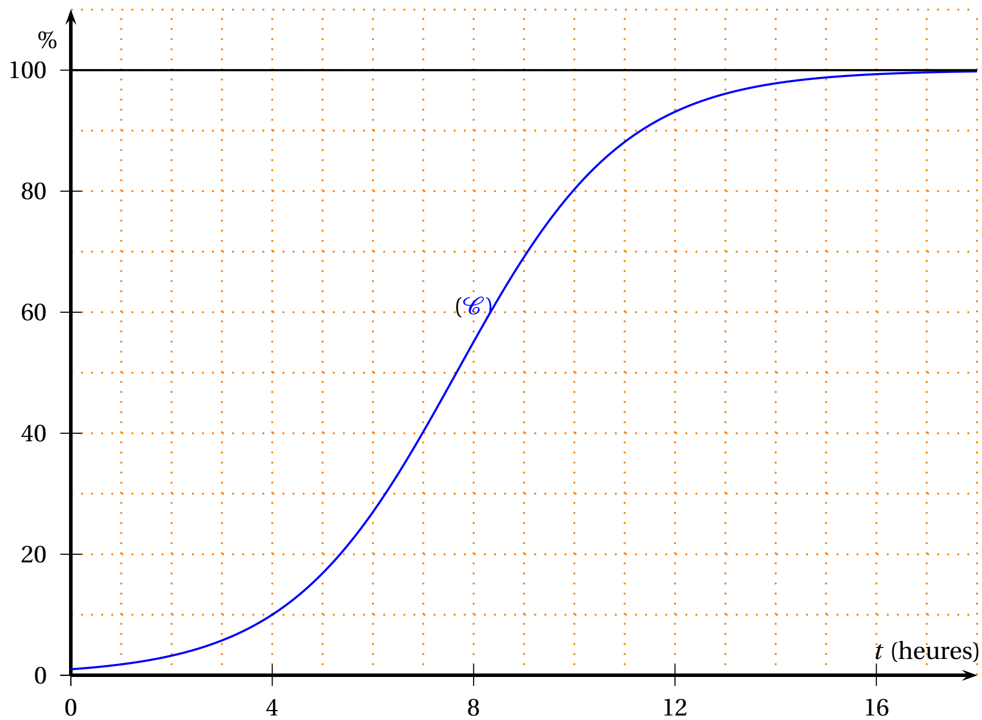
   b. Estimer la population au bout de 15 minutes.

EXERCICE 2   **10 points**

Vers 1840, Verhulst propose un modèle d'évolution d'une population de bactéries en culture. Il suppose que la population ne peut dépasser une certaine valeur maximale.
On note $f(t)$ le pourcentage de cette valeur maximale à l'instant t. On suppose que $f(0) = 1$ et, pour une certaine population, on obtient que

$$f(t) = \frac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6t}},$$

où t est exprimé en heures.
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f.



Partie A : Les questions sont résolues par lecture graphique.

1. Donner le pourcentage du maximum de la population à la date $t = 10$.
2. Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$?
3. À quel instant t, à $0,1$ près, la population atteint-elle 50 % de son maximum ?
4. Quel est le signe de $f(t)$?
5. À quelle date la croissance de la population, est-elle la plus rapide, à la date $t = 2$ ou à la date $t = 10$? Expliquer.

Partie B : Les questions sont résolues par le calcul.

1. Calculer à $0,1$ % près le pourcentage de la population à la date $t = 10$.
2. Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$? Que peut-on en déduire ?
3. À quel instant t la population atteint-elle 50 % de son maximum (à $0,01$ près) ?
4. Prouver que la dérivée de f est

$$f'(t) = \frac{5940\mathrm{e}^{-0,6t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,6t}\right)^2}.$$

   En déduire le signe de $f'(t)$.
5. Trouver l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 (le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine étant donnés à $0,1$ près).