Baccalauréat STL Biotechnologies Métropole–La Réunion
11 septembre 2014

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise fabrique en très grande quantité des gélules vides destinées à l'industrie pharmaceutique. La fabrication est faite à l'aide d'une machine.
On admet que la masse M, en milligrammes, d'une gélule suit une loi normale d'espérance 66 et d'écart type $0,5$.

1. Déterminer la probabilité pour qu'une gélule prise au hasard ait :

- **a.** une masse comprise entre 65 et 67 mg.
- **b.** une masse inférieure à 65,5 mg. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2. Une gélule est considérée comme conforme si sa masse est comprise entre 65 et 67 mg. La probabilité pour qu'une gélule soit considérée comme conforme est égale à 0,95.

On prélève au hasard un lot de 50 gélules. On suppose que l'effectif est assez important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par X le nombre de gélules considérées comme conformes dans ce lot.

- **a.** Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer n et p.
- **b.** Déterminer la probabilité que le lot contienne 50 gélules conformes.
  Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

3. On s'intéresse maintenant à la couleur de chaque gélule. On prélève un lot de 1 000 gélules dans la production quotidienne de la machine. Dans cet échantillon, 43 gélules présentent un défaut de teinte.

Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion de gélules présentant un défaut de teinte.

Les bornes de l'intervalle seront arrondies à 10^{-4} près.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Dans une expérience de laboratoire, sous certaines conditions, une population de bactéries double toutes les heures. Initialement, on compte 1 000 bactéries. On souhaite déterminer l'heure où il y en aura dix fois plus.

- **a.** Parmi les trois algorithmes suivants, quel est celui répondant au problème ?

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
N prend la valeur 1 000 H prend la valeur 0 Tant que $N < 10000$ faire N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que Afficher H	N prend la valeur 1 000 Tant que $N < 10000$ faire N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que H prend la valeur $H+1$ Afficher H	N prend la valeur 1 000 H prend la valeur 0 Tant que $N < 10000$ faire H prend la valeur $H+1$ N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que Afficher H

- **b.** Quelle sera la valeur affichée par l'algorithme répondant au problème posé ?

2. Dans une autre expérience, au début il y a 300 anticorps et 500 bactéries. Les anticorps augmentent de 10 % par heure, les bactéries augmentent de 7 % par heure.

On note a_n et b_n respectivement le nombre d'anticorps et de bactéries à l'heure n.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 500$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,1 \times a_n$, et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

b. Exprimer par une démarche analogue b_n en fonction de n.

c. Déterminer les entiers naturels n tels que $a_n > b_n$. En déduire l'heure à partir de laquelle il y aura plus d'anticorps que de bactéries.

EXERCICE 3 **5 points**

Les deux parties de l'exercice proposent une approche différente de l'étude cinétique d'une réaction catalysée par la β-fructosidase.

La vitesse initiale v de la réaction a été mesurée en présence de différentes concentrations, notées s, de substrats dans des conditions identiques de pH et de température. Les résultats sont les suivants :

Concentration de substrat s_i en mmol.L^{-1}	0,1	0,2	0,3	0,5	1	1,3
Vitesse initiale v_i en μmol par minute	4,5	5,6	6,3	6,9	7,7	8,1

Partie A : Utilisation d'un changement de variable

1. On effectue les changements de variable : $x_i = \dfrac{1}{s_i}$ et $y_i = \dfrac{1}{v_i}$.

x_i	10					
y_i	0,22					

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessus (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

b. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,,\ y_i\right)$ sur une feuille de papier millimétré. On choisira 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 0,02 en ordonnée.

2. **a.** Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement D sous la forme $y = ax + b$ (a est arrondi à 10^{-4} près et b est arrondi à 10^{-2} près).

b. Tracer la droite D sur le graphique précédent.

3. On admet que la β-fructosidase suit le modèle de Michaelis-Menten et on peut alors écrire : $\dfrac{1}{v} = \dfrac{K_M}{v_{\max}} \times \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{v_{\max}}$ où $v_{v_{\max}}$ est la vitesse initiale maximale et K_M est la constante de Michaelis spécifique de la β-fructosidase.

On admet que $a = \dfrac{K_M}{v_{\max}}$ et $b = \dfrac{1}{v_{\max}}$ où a et b sont les valeurs obtenues à la question **2. a**.

En déduire $v_{\max}$ à 10^{-2} près, puis KM à 10^{-4} près.

Partie B : Utilisation d'une représentation de Michaelis-Menten

Sur l'annexe, on a placé les points $N_i\left(s_i\,,\ v_i\right)$ relevés expérimentalement et on a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0,01 + 0,12s} = \frac{1}{\dfrac{0,01}{s} + 0,12}.$$

On estime que cette courbe C est un ajustement acceptable des relevés expérimentaux.

1. **a.** Déterminer la limite de v lorsque s tend vers $+\infty$. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
   b. En déduire que la courbe C admet une asymptote que l'on tracera sur l'annexe.
   c. En admettant que v_{max} est la limite de v quand s tend vers $+\infty$, donner v_{max}.

2. Résoudre graphiquement $f(s) = \dfrac{v_{\text{max}}}{2}$. On laissera apparents les traits de construction.
   Remarque : la solution est appelée la constante de Michaelis K_M.

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,2y = 100$$

où y est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Démontrer que la solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction y définie sur $[0 ; +\infty[$ par $y(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right)$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right).$$

On désigne par C_1, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Que représente la droite D d'équation $y = 500$ pour la courbe C_1 ?
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$.
   Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C : exploitation des résultats de la partie B

Lors de l'étude de la progression d'une épidémie sur une population de 2 000 personnes, on a établi que le nombre d'individus contaminés à la date t, exprimée en jours, est donné par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right) \quad \text{pour } t \text{ entre } 0 \text{ et } 30.$$

1. Combien de personnes sont contaminées après un jour d'épidémie ? Après dix jours ? Les résultats seront arrondis à l'unité près.
2. De quel pourcentage a augmenté le nombre de personnes contaminées entre le premier et le dixième jour de l'épidémie ? On donnera la réponse en %, arrondie au centième près.
3. Le tiers de la population peut-il être contaminé ?
4. Au bout de combien de jours, le huitième de la population est-il contaminé ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3 : Points $N_i\,(s_i,\ n_i)$ et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0,01 + 0,12s} \quad \text{où } v \text{ est en } \mu\text{mol par minute et } s \text{ en mmol par litre.}$$