Baccalauréat STL Métropole Biotechnologies 20 juin 2013

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Le responsable d'un site de compostage fait un bilan de l'évolution des quantités de déchets compostés dans son entreprise.
Il constate qu'en 2002, sur le site, 5 900 tonnes de déchets ont été traitées et qu'ensuite les quantités traitées augmentent régulièrement de 15 % par an.
On admet que la progression se poursuivra au même rythme jusqu'en 2020.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en tonnes, de déchets traités durant l'année $2002 + n$. On aura ainsi $u_0 = 5900$.

1. Préciser la nature, le premier terme et la raison de la suite (u_n).

   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. Calculer la quantité de déchets traités en 2006. Arrondir à l'unité près.

3. Déterminer à partir de quelle année la quantité de déchets traités dépassera les 20 000 tonnes. Justifier votre réponse.

4. Calculer la quantité totale de déchets traités depuis le début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2020. Arrondir à l'unité près.

EXERCICE 2 **5 points**

On introduit un inoculum bactérien dans un bioréacteur contenant un milieu de culture. On mesure la population bactérienne toutes les heures à partir de la troisième heure. Le tableau suivant donne le résultat de ces mesures.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries	$1,09 \times 10^5$	$2,68 \times 10^5$	$7,31 \times 10^5$	$2,2 \times 10^6$	$6,93 \times 10^6$	$1,79 \times 10^7$	$5,12 \times 10^7$

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, les valeurs étant arrondies à 10^{-2} près.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
$y_i = \ln(N_i)$	11,60				15,75		

2. Tracer dans le repère orthonormé donné en annexe, page 5, le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme unité 1 cm sur chaque axe.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.

   Tracer cette droite dans le repère précédent.

4. On suppose que l'évolution du nombre de bactéries se poursuit suivant le même modèle jusqu'à ce que les éléments nutritifs commencent à manquer.

a. Déterminer, à 10^6 près, le nombre de bactéries dans le bioréacteur au bout de 11 heures.

b. Les éléments nutritifs commencent à manquer dès que le nombre de bactéries atteint 3×10^9.

À quel moment cela se produit-il ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3 **5 points**

Une société fabrique des tubes à essai.
Une étude a montré que la probabilité pour un tube, pris au hasard dans la production, de présenter un défaut est égale à 0,03.
On suppose la production suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

Dans cet exercice, toutes les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près.*

1. On prélève 10 tubes dans la production. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement.

a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,03.

b. Déterminer la probabilité $P(X = 1)$.

c. Déterminer la probabilité que, parmi les 10 tubes, un tube au moins présente un défaut.

2. On prélève 300 tubes dans la production. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type 3.

a. Déterminer la probabilité que le prélèvement contienne entre 6 et 12 tubes défectueux.

b. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de tubes défectueux pour un échantillon de taille 300. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.

c. Le responsable qualité veut vérifier la production. Pour cela, il prélève un échantillon de 300 tubes.

Dans cet échantillon, 14 tubes sont défectueux. Doit-il faire procéder à un réglage des machines ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : Lecture graphique

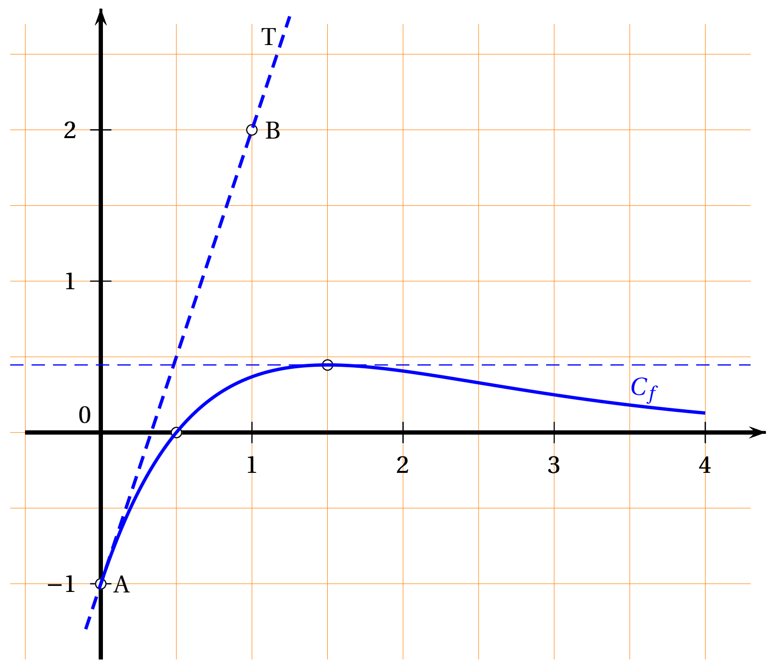
La courbe C_f tracée ci-dessous est la représentation graphique sur $[0 ; 4]$ d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{1}{2}$.

La tangente T à la courbe C_f au point A $(0 , -1)$ passe par le point B $(1 , 2)$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ,\ 4]$.

2. Déterminer les valeurs de $f'(0)$ et de $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Partie B : Étude de la fonction

On admet que la fonction f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

2. La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

On donne ci-dessous les tableaux de variation et des tableaux de valeurs de trois fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$: F_1, F_2 et F_3.

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$F_1(x)$	3 ↘	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ ↗	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_1(x)$	3	0	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_2(x)$	-1	$\searrow$	$\frac{-2}{\sqrt{\text{e}}}$	$\nearrow$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_2(x)$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{\text{e}}}$	$-4\text{e}^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{5}{\text{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{\text{e}}$	$\searrow$	$-\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\text{e}}$	0	$-\frac{\text{e}^2}{2}$

1. Une de ces fonctions est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$. Laquelle ? Justifier votre choix.

2. À l'aide de cette fonction, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **Annexe(à rendre avec la copie)**