

♫ Baccalauréat STL Métropole juin 2008 ♫
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaire autorisés

3 heures

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

EXERCICE 1

4 points

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

2. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2 .
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2e^{5i\frac{\pi}{6}} ; \quad z_B = 2e^{-5i\frac{\pi}{6}} ; \quad z_C = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

- a. Écrire les nombres complexes z_A , z_B et z_C sous forme algébrique.
- b. Placer les points A, B et C sur une figure.
- c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Quelle est la nature du triangle AOC?

EXERCICE 2

5 points

Dans cet exercice l'unité de temps est l'heure et l'unité de température est le degré Celsius.

À l'instant $t = 0$, une tarte sort d'un four, à la température de 220° . Elle est alors placée dans une salle à 20° .

On désigne par $f(t)$ la température de la tarte à l'instant t . On définit ainsi une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

On suppose que la vitesse $f'(t)$ de refroidissement de la tarte est proportionnelle à la différence entre la température de la tarte et celle de la salle, c'est-à-dire $f(t) - 20$.

On admet donc qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel positif t ,

$$f'(t) = \lambda[f(t) - 20].$$

1. On pose : $y(t) = f(t) - 20$.
- a. Montrer que la fonction y ainsi définie est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- b. Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- c. En déduire que, pour tout nombre réel positif t , $f(t) = Ce^{\lambda t} + 20$, où C est un nombre réel.
- d. En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer C .

2. a. Au bout d'un quart d'heure (c'est-à-dire pour $t = \frac{1}{4}$), la température de la tarte est égale à 60° .
Montrer que, pour tout nombre réel positif t , $f(t) = 200e^{(-4\ln 5)t} + 20$.
- b. Déterminer la température de la tarte au bout d'une demi-heure.

PROBLÈME**11 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f(x) = e^{2x} - 10e^x + 16.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 8)$.
b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f .
a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 5)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

5. a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point A d'abscisse 0.
b. Construire la droite \mathcal{T} puis, sur le même graphique, la partie de la courbe correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3; 2,2]$.
c. Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y = 16$. On mettra en évidence le point B d'abscisse $\ln 5$, ainsi que la tangente à \mathcal{C} en ce point.
6. a. Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln 2]$.
b. On considère le domaine plan \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} .
c. Donner une valeur approchée de \mathcal{A} au centième par défaut.