∽ Baccalauréat STL juin 2006 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée — 3 heures

Durée de l'épreuve : 3 heures — Coefficient : 4

Exercice 1 — **5 points**

Partie A

Pour tout nombre complexe z, on note

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

1. Calculer $P(2)$.
   Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
   $z^2 - 2z + 4 = 0$.
   En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. **a.** Placer, sur la copie, les points A, B et C dans le plan complexe.
   b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ de centre O.
   c. Construire le cercle Γ.
2. Déterminer un argument du nombre complexe b. En déduire une mesure de l'angle $\overrightarrow{\mathrm{OA}},~\overrightarrow{\mathrm{OB}})$.
   Quelle est la nature du triangle OAB ?

Exercice 2 — **5 points**

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal.
Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres. Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1\,013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   b. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $P_n = 1\,013 \times 0,987\,5^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x)$ est égal à $\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}.$$
   b. Étudier le signe de $-2 + \ln x$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On note I le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées du point I.
5. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
   Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$.
6. Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{T}$.
   On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B

1. **a.** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $$g(x) = (\ln x)^2.$$
   On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. **a.** Calculer $\text{J} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie A.
   b. Interpréter graphiquement l'intégrale J.