∽ Baccalauréat STL Métropole septembre 2006 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée — 3 heures
Durée de l'épreuve : 3 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E), dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2} ; -\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 2 — **5 points**

1. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\dfrac{1}{2}z^2 + z + 1 = 0$.
   b. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les nombres complexes définis par :
   $$z_1 = -1 + \text{i}, \quad z_2 = \overline{z_1}, \quad z_3 = -2 \quad \text{et } z_4 = -2z_1.$$
   Écrire z_2 et z_4 sous forme algébrique.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
   a. Placer les points A, B, C, D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. On note I le milieu du segment [CD]. Déterminer l'affixe du point I.
   c. Montrer que le triangle ACD est rectangle.
   d. Préciser le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD.

PROBLÈME — **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(3 - x^2\right)\text{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthononnal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

Partie I : étude de la fonction *f*

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Étudier la limite de f en $-\infty$. On pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$; $n \in \mathbb{N}$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Partie II : Tracé d'une parabole

1. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = 6 - 2x^2$.
Vérifier que les points A et B, définies à la question 3 de la partie I, appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x,

$$\left(6 - 2x^2\right) - f(x) = \left(3 - x^2\right)\left(2 - \mathrm{e}^x\right).$$

   b. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\ ;\ \ln 2\right]$,

$$\left(3 - x^2\right)\left(2 - \mathrm{e}^x\right) \geqslant 0.$$

   c. En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\ ;\ \ln 2\right]$, la parabole $\mathscr{P}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Tracer la parabole $\mathscr{P}$ sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

Partie III : Calcul d'aires

1. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^x.$$

   a. On note G' la fonction dérivée de la fonction G. Calculer $G'(x)$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On considère le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = 0$.

   a. Hachurer le domaine sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

   b. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire.
   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Annexe (à rendre avec la copie)