∽ Baccalauréat STL spécialité biotechnologies Métropole ∾ 10 septembre 2019

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une entreprise fabrique en grande quantité des boîtes de Petri destinées à des laboratoires d'analyses microbiologiques.
Dans cet exercice, on étudie la qualité de la production de ces boîtes.

Partie A

L'entreprise affirme que la probabilité qu'une boîte ait un défaut est égale à 0,03. On prélève au hasard 100 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 boîtes, associe le nombre de boîtes présentant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « Le prélèvement contient exactement 4 boîtes ayant un défaut ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « Le prélèvement contient au plus 3 boîtes ayant un défaut ».

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à une boîte de Petri prélevée au hasard, associe son diamètre en millimètre.
Le service qualité de l'entreprise estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 89,7$ et d'écart type $\sigma = 0,20$.

1. Déterminer la probabilité $P(89,3 \leqslant Y \leqslant 90,1)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une boîte de Petri ait un diamètre supérieur ou égal à $89,9$ mm.

Partie C

La machine de production a été réglée dans le but que 3 % au maximum des boîtes de Petri soient non conformes. On prélève un échantillon de 200 boîtes de Petri et on constate que parmi celles-ci, 9 sont non conformes.
Suite à ce constat, doit -on accepter le réglage de cette machine ? Justifier.

EXERCICE 2 **3 points**

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques destinés à fonctionner de manière continue. On a étudié la durée de vie, en jour, de ces composants.
La variable aléatoire D associée à cette durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre
$\lambda = 0{,}000\,5$.
On rappelle que $P(D \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, on précisera si elle est vraie ou fausse en justifiant de manière claire et concise la réponse donnée.
Affirmation 1 : L'espérance de cette loi est égale à 2 000.

Affirmation 2 : La probabilité qu'un composant de ce type tombe en panne après les 500 premiers jours est environ 0,221.
Affirmation 3 : L'entreprise souhaite qu'au maximum 10 % des composants tombent en panne au cours de la période de garantie. Cette période de garantie doit être d'environ 210 jours.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans un laboratoire d'industrie laitière, on cultive une population de bactéries qui compte initialement 60 000 individus. On étudie l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps.

Partie A

On émet l'hypothèse que la population augmente de 18 % toutes les heures et on modélise l'évolution de cette population par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de bactéries de la population étudiée après n heures. On a alors $u_0 = 60000$.

1. Déterminer les termes u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n).
4. Exprimer alors u_n en fonction de n.
5. Déterminer u_6 à l'unité près et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On souhaite déterminer à partir de combien d'heures la population de bactéries dépassera 200 000 individus. Pour cela, on utilise un algorithme.

1. Recopier et compléter l'algorithme de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre d'heures cherché.

```
N ← 0
U ← 60000
Tant que U < ... :
  |N ← N + 1
  |U ← ...
Fin Tant que
```

2. Déterminer le nombre d'heures à partir duquel la population de bactéries dépassera 200 000.
   Expliquer la démarche utilisée.

EXERCICE 4 — 7 points

Des scientifiques étudient la croissance d'une plante vivace d'une variété donnée. Pour cela, ils ont relevé tous les mois la hauteur de plants témoins, mesurant tous 12 cm au début de l'expérimentation.
Dans le tableau ci-dessous, h désigne la hauteur moyenne des plants, exprimée en centimètre, au bout de t mois.

t_i (exprimé en mois)	0	1	2	3	4	5	6
h_i (exprimé en centimètre)	12	16,6	20	22	23,1	23,6	23,8

1. Construire sur l'annexe le nuage de points $M_i\,(t_i\,;\,h_i)$ correspondant au tableau ci-dessus.

2. L'utilisation d'un ajustement affine du nuage de points semble-t-elle pertinente ?

3. On pose $y_i = \ln\left(\dfrac{24}{h_i} - 1\right)$.

Compléter la troisième ligne du tableau donné en annexe (arrondir les valeurs à 0,001 près).

4. On nomme $\mathcal{D}$ la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés.

L'équation réduite de $\mathcal{D}$ est de la forme $y = at + b$ où a et b sont des nombres réels. En utilisant la calculatrice, donner les valeurs de a et b à 0,001 près.

5. On admet que $h(t) = \dfrac{24}{1 + \mathrm{e}^{-0,8t}}$.

Estimer, au centimètre près, la hauteur du plant au bout de 10 mois.

6. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{24}{1 + \mathrm{e}^{-0,8x}}.$$

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et on admet que :

$$g'(x) = \frac{19,2\mathrm{e}^{-0,8x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-0,8x}\right)^2}.$$

En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

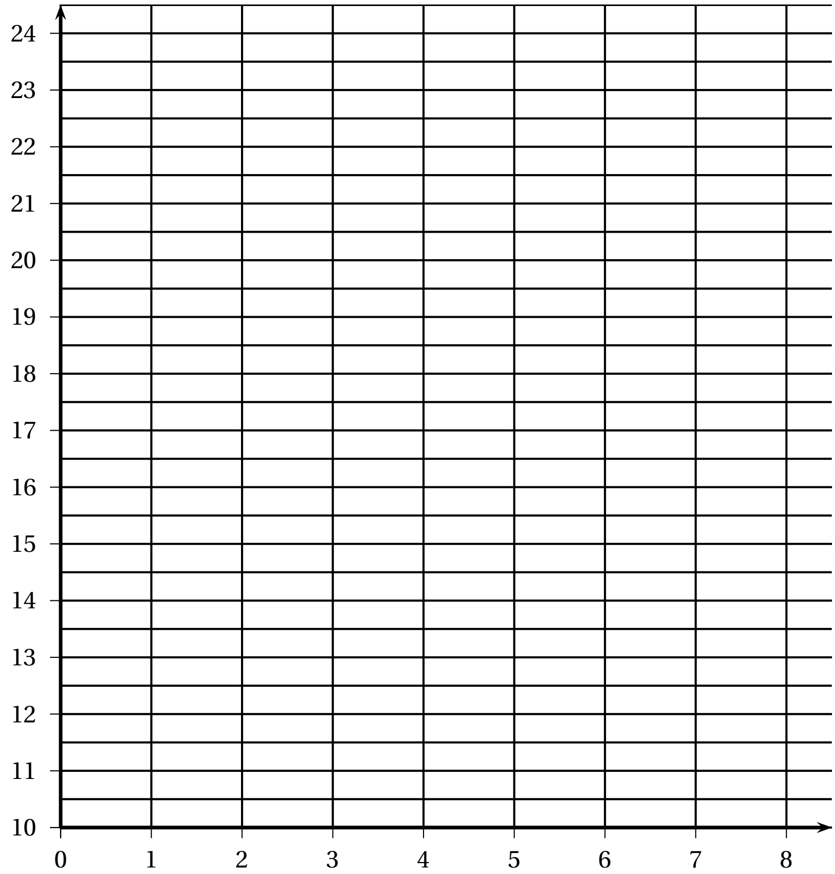
b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,8x} = 0$.

c. La taille de la plante pourra-t-elle atteindre 25 cm ? Justifier.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 3

t_i	0	1	2	3	4	5	6
h_i	12	16,6	20	22	23,1	23,6	23,8
y_i							