∽ Baccalauréat STL Métropole septembre 2008 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaire autorisés

Durée de l'épreuve : 3 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 + 6z + 12 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_\text{A} = -3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{B} = -3 - \text{i}\sqrt{3}$.

Déterminer la forme trigonométrique des nombres z_A et z_B. Placer les points A et B sur une figure.

3. Soit C le point d'affixe $z_\text{C} = 2\sqrt{3}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Placer le point C sur la figure.

b. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z_C.

c. Quelle est la nature du triangle BOC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un laboratoire de chimie, un stagiaire utilise un liquide dont l'évaporation est importante.
À l'origine, il y a 75 cl de liquide dans la bouteille. Le stagiaire referme mal cette bouteille et on considère alors que le liquide perd chaque jour 5 % de son volume par évaporation.

1. On note u_n la quantité de liquide, exprimée en cl, présente dans la bouteille au bout de n jours. Ainsi, $u_0 = 75$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Vérifier que, pour tout nombre entier n, $u_n = 75 \times (0,95)^n$.

c. Calculer la quantité de liquide restant dans la bouteille au bout de sept jours (on donnera le résultat arrondi au dixième).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le nombre minimum de jours nécessaires pour que la bouteille contienne moins de 25 cl.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{2}(2-x)\mathrm{e}^{x}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

1. En observant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$, déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. Calculer la valeur exacte de $f(1)$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
   Montrer que la droite $\mathscr{T}$ a pour équation $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}(2-x)$.
2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x, $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}(2-x) - f(x) = \frac{1}{2}(2-x)\left(\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{x}\right)$.
   b. Étudier le signe de $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}(2-x) - f(x)\right]$ suivant les valeurs de x.
   c. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{T}$.
3. Tracer la droite $\mathscr{T}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ puis, sur le même graphique, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-4\,;\,3]$.

Partie C

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-3)\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}\left(2x - \frac{x^{2}}{2}\right).$$

On note g' la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
On admet que, pour tout nombre réel x, $g'(x) = \frac{1}{2}(2-x)\left(\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{x}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{T}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique représentant la droite $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$. En donner la valeur arrondie au centième.