∽ Baccalauréat STL Métropole 21 juin 2011 ∾
Physique de laboratoire et de procédé industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **6 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct d'unité graphique 1 cm.

Première partie

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 2.$$

1. Montrer que -1 est une racine du polynôme P.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z+1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Deuxième partie

On appelle A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 \quad ; \quad z_{\text{B}} = 1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1 - \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = 1 - 4\text{i}.$$

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{B} et z_{C}.
   b. Écrire z_{B} et z_{C} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Montrer que le point B est l'image du point C par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
2. **a.** Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.
   b. En déduire l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABD.
   c. Déterminer l'affixe du point E tel que le quadrilatère ABED soit un rectangle.

EXERCICE 2 — **4 points**

On estime qu'une batterie de téléphone portable perd, à chaque charge, 0,2 % de sa capacité. La capacité initiale de la batterie, notée C_0, est de 800 mAh (milliampères-heure). Pour tout entier naturel n, on note C_n la capacité restante après la n-ième charge.

1. Donner les valeurs de C_1, C_2 et C_3 arrondies à l'unité près.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,998C_n$.
   b. En déduire la nature de la suite (C_n). On donnera son premier terme et sa raison.
2. Exprimer C_n en fonction de n.
3. Calculer la valeur arrondie à l'unité près de la capacité restante de la batterie après 100 charges.

4. On considère que la batterie est hors d'usage lorsque sa capacité est inférieure à 10 mAh. Déterminer à partir de combien de charges la batterie est hors d'usage.

PROBLÈME **10 points**

La deuxième partie peut être traitée indépendamment de la première partie.

Première partie : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$\text{(E)}: \quad y' + y = 2x - \frac{3}{2}$$

où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0.$ 7
2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x - \frac{7}{2}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = C\mathrm{e}^{-x} + u(x)$ où C est un réel quelconque et u la fonction définie à la question 2.
   a. Vérifier que la fonction h est solution de l'équation (E).
   b. Déterminer le nombre réel C tel que $h(0) = -\frac{1}{2}$.

Deuxième partie : étude de la fonction *f*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2x - \frac{7}{2}$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x\mathrm{e}^{x} - \frac{7}{2}\mathrm{e}^{x} + 3\right)$, puis en déduire la limite de f en $-\infty$.
   c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - \frac{7}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{T}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Troisième partie : calcul d'une aire

On appelle $\mathscr{E}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

1. Donner une estimation de l'ordre de grandeur en cm^2 de l'aire de la partie $\mathscr{E}$ en calculant l'aire d'un trapèze [1] que l'on précisera.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$ en unités d'aire. Donner sa valeur arrondie en cm^2 à $0,01$ cm^2 près.

1. On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\dfrac{B+b}{2} \times h$, où B, b et h sont les longueurs respectives de la grande base, de la petite base et de la hauteur.