∽ Baccalauréat STL Métropole 13 septembre 2011 ∾
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **6 points**

On note i le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

Les solutions seront données sous forme algébrique.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$$

a. Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes z_{A} et z_{B} c'est-à-dire leur écriture sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ avec r nombre réel strictement positif et θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

b. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z_{C}.

c. Construire avec précision les points A, B et C.

d. Calculer les longueurs OA, OC et AC. En déduire la nature du triangle OAC.

3. On considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. On définit le point D comme l'image du point A par cette rotation.

a. Calculer la forme algébrique de l'affixe de D notée z_{D}.

b. À l'aide de la question 2. a., déterminer la forme exponentielle de z_{D}.

c. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 — **5 points**

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y'' sa dérivée seconde.

1. Donner la solution générale de (E).

2. Déterminer la solution particulière, notée f, de (E) telle que

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \quad \text{et } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4, \text{ où } f' \text{ est la dérivée de la fonction } f.$$

3. Vérifier que f peut s'écrire sous la forme : $f(t) = 4\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

PROBLÈME **9 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - 2x - 2\ln x.$$

1. Calculer la fonction g', dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction g sur cet intervalle (les limites ne sont pas demandées).
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. En déduire le signe de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B Étude de la fonction *f*

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x + \ln x}{x^2} + 3$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 3$.

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. Interpréter graphiquement les résultats des limites précédentes.
2. Déterminer la fonction f', dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C Calcul d'aire

1. On note $\mathscr{E}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. Hachurer le domaine $\mathscr{E}$ sur le graphique.
2. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = \dfrac{-\ln x - 1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

   Montrer que la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{E}$ est $3\mathrm{e} - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ unités d'aire.