Baccalauréat STL Métropole 17 juin 2008
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaires autorisés — 3 heures

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **5 points**

On note i le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité 1 cm).

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes (les solutions seront données sous forme algébrique) :

$$\begin{array}{ll} (1) & z^2 - 10z + 50 = 0 \\ (2) & z + 2 = \text{i}z\sqrt{3} - 6 \end{array}$$

2. **a.** Soit A le point d'affixe $z_\text{A} = 5 - 5\text{i}$.
   Déterminer le module, un argument et la notation exponentielle de z_A.

   b. Soit B le point d'affixe z_B, z_B étant le nombre complexe conjugué de z_A.
   Déterminer la notation exponentielle de z_B, puis celle de $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}$.
   En déduire que B est l'image de A par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
   Construire le triangle OAB dans le repère donné et indiquer sa nature.

   c. Soit C le point d'affixe $z_\text{C} = -2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.
   Montrer que l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est le point D, d'affixe $z_\text{D} = -2\sqrt{3} + 2\text{i}$.
   Calculer la distance OC et construire avec précision le triangle OCD.

   d. Soit K le milieu de [AC].
   Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{OK}}$ et $\overrightarrow{\text{DB}}$ puis montrer que les droites (DB) et (OK) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 — **4 points**

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{9\pi^2}{16} = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Donner la solution générale de (E).
2. Déterminer la solution particulière, notée f, de (E) telle que $f(4) = -\sqrt{3}$ et $f'\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$.
3. Vérifier que f s'écrit sous la forme : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Montrer que f est périodique de période $\dfrac{8}{3}$.

5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{8}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note E le point de coordonnées $(\ln 2,\ \ln 2)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}.$$

1. Calculer la dérivée de g.

2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a :

$$f(x) = x - 2 + \frac{8}{\mathrm{e}^x + 2}$$

2. En utilisant l'une des formes de $f(x)$, calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x - 2$ et $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

3. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 2}\right)^2$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}$, sa tangente en E et ses asymptotes.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$.

2. En déduire une primitive de f.

3. Déterminer en cm^2, en valeur exacte puis au mm^2 près, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.