Baccalauréat STL Métropole juin 2006
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée	3 heures
Durée de l'épreuve : 4 heures	Coefficient : 4

Le sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher.
Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

Un joueur mise 4 euros, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en euros) inscrit sur la boule.

1. Le joueur effectue un tirage.
On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 euros) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 euros).
Calculer p_1 etp_2.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd),

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

c. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

3. Un jeu est équitable si et seulement si $\text{E}(X) = 0$.
On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1.
Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. (unité graphique 1 cm).
On considère un polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$ où z est une variable complexe.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z+2)\left(az^2 + bz + c\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 - 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}.$$

a. Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_{A} et z_{B}.

b. Placer dans le plan $\mathcal{P}$ les points A et B.

c. Quelle est la nature du triangle OAB ?

3. On considère la transformation T du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z.$$

a. Caractériser géométriquement la transformation T.

b. Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point A′ image de A par la transformation T.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **10 points**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$$

dans le plan rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 2cm).

PARTIE A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Montrer que $f'(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Étude de la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

   a. Montrer que pour tout réel x on a :

   $$f(x)-(x+1) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}\cdot g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x+1-\mathrm{e}^{x}.$$

   b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

   d. En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$.

   e. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

5. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

PARTIE B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \left(-x^2-4x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x=3$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.