Baccalauréat STL spécialité biotechnologies Polynésie 18 juin 2019

EXERCICE 1 **(4 points)**

Un médecin prescrit une prise de sang à son patient qui se plaint de fatigue récurrente. Cette prise de sang fait apparaître que la concentration en vitamine B12 est anormalement basse.

Le médecin décide de lui prescrire une injection par jour de vitamine B12, ainsi qu'une prise de sang chaque semaine pour en contrôler la concentration. On note $V(t)$ la concentration en picogramme par millilitre ($pg \cdot mL^{-1}$) au bout de la semaine t.

On obtient le tableau ci-dessous :

Durée t_i écoulée (en semaine)	0	1	3	5	7	9
Concentration y_i de vitamine B12 (en $pg \cdot mL^{-1}$)	100	104	118	128	141	156

On se propose de modéliser la concentration en vitamine B12 en fonction du temps écoulé depuis le début du traitement.

Comme un ajustement affine n'est pas pertinent, on effectue le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant (on arrondira les valeurs à 10^{-3}).

t_i	0	1	3	5	7	9
$z_i = \ln(y_i)$						

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$, où les coefficients réels a et b seront arrondis au millième.

Pour la suite, on prend comme modèle d'ajustement, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $z = 0,05t + 4,61$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel positif t, $100e^{0,05t}$ représente la concentration en vitamine B12 exprimée en $pg \cdot mL^{-1}$, t semaines après le début du traitement.
3. Le patient doit atteindre une concentration de $500\,pg \cdot mL^{-1}$ pour que les symptômes de fatigue disparaissent nettement. Au bout de combien de semaines le patient peut-il espérer arrêter son traitement ?
4. Cet ajustement serait-il adapté à long terme ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

En France, l'eau du robinet est l'une des substances les plus contrôlées. Elle fait l'objet d'un suivi sanitaire permanent, destiné à en garantir la sécurité.

Depuis plusieurs années, la communauté scientifique s'interroge sur la présence dans l'eau, à l'état de traces, de résidus de médicaments de type anxiolytique. Chaque année, les pouvoirs publics en mesurent la concentration.

En 2010, on constatait qu'il y avait en moyenne dans l'eau du robinet 2 microgrammes par litre ($\mu g \cdot L^{-1}$) de molécules d'anxiolytique.

Depuis 2010, on constate une réduction de 2 % par an de la quantité de molécules d'anxiolytique dans l'eau du robinet.

On choisit de modéliser la concentration de molécules d'anxiolytique par une suite. Pour tout entier naturel n, on note C_n la concentration de cette molécule d'anxiolytique dans l'eau l'année ($2010+n$). Cette concentration est exprimée en $\mu g \cdot L^{-1}$.

1. Donner la valeur de C_0 et calculer C_1.
2. **a.** Justifier que la suite (C_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (C_n) lorsque n tend vers l'infini. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
4. Les pouvoirs publics souhaitent limiter la concentration en molécules d'anxiolytique à $0,5\,\mu g \cdot L^{-1}$.

   Pour cela, on considère l'algorithme incomplet suivant :

1	$C \longleftarrow 2$
2	$N \longleftarrow 0$
3	Tant que $C > \ldots$
4	$N \longleftarrow N+1$
5	$C \longleftarrow C \times \ldots$
6	Fin Tant que

a. Recopier cet algorithme et compléter les lignes 3 et 5 afin que cet algorithme détermine la durée nécessaire à la réalisation de l'objectif fixé par les pouvoirs publics.

b. Déterminer la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

EXERCICE 3 **5 points**

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.
Dans cet exercice, on s'intéresse à la fabrication de tubes destinés à être utilisés dans un laboratoire pharmaceutique.

Partie A

Pour chacune des affirmations de cette partie, on précisera si elle est vraie ou fausse, en justifiant de manière claire et concise la réponse donnée.
On note C la variable aléatoire qui à chaque tube fabriqué associe sa capacité en millilitre (mL).
On suppose que C suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 2$.

Affirmation 1 : La probabilité que la capacité du tube soit comprise entre 48 mL et 52 mL est environ égale à 0,95.

Affirmation 2 : 30 % des tubes ont une capacité inférieure ou égale à 49 mL, à 1 mL près.

On note E l'événement « Le tube présente un défaut de fabrication. ». On suppose que la probabilité de l'événement E est $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard dans la chaîne de production 200 tubes pour vérification. On suppose que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 200 tubes, associe le nombre de tubes ayant un défaut.

Affirmation 3 : X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,03$.

Affirmation 4 : En moyenne, un lot de 200 tubes contient 5 tubes avec défaut.

Affirmation 5 : La probabilité qu'au moins 5 tubes soient défectueux est 0,719 au millième près.

Partie B

Le fabricant veut améliorer la qualité de fabrication de ses tubes.
Pour cela, il en teste 400 et constate que 90 % n'ont pas de défaut.
Après des réglages permettant d'améliorer la qualité de fabrication, un nouvel échantillon de 400 tubes est prélevé : 94 % sont sans défaut.
Est-il raisonnable, au niveau de confiance 95 %, de penser que la qualité de fabrication s'est améliorée ?

On rappelle les formules suivantes :

— L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p dans la population est connue est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

— Un intervalle de confiance à 95 % d'une proportion, calculé à partir d'une fréquence f sur un échantillon de taille n est donné par :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

EXERCICE 4 **6 points**

À un patient souffrant de douleurs intenses, on injecte un antidouleur en perfusion au rythme de 4 milligrammes par heure.
On suppose que cet antidouleur n'était pas présent dans le sang avant la perfusion.
La quantité d'antidouleur présent à un instant donné est modélisée par une fonction f.
Lorsque t représente le temps écoulé, en heure, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligramme, d'antidouleur présent dans le sang.

Partie A

On admet que la fonction f est solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad y' + 0,02y = 4.$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On admet que $f(0) = 0$. En déduire une expression de $f(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

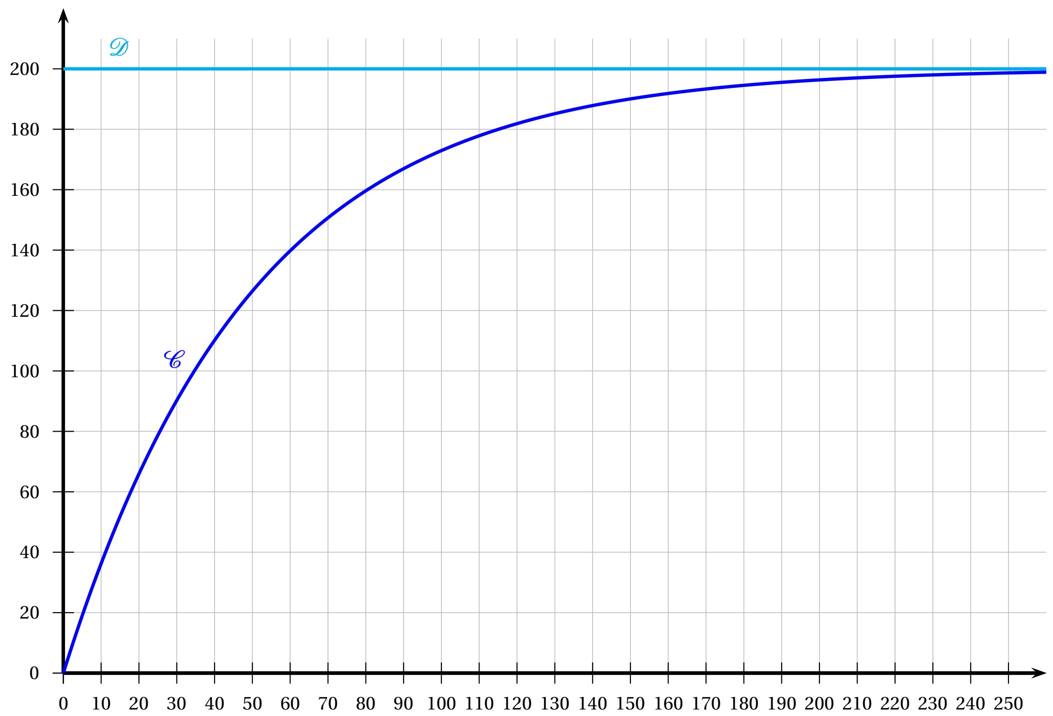
$$f(t) = -200\mathrm{e}^{-0,02t} + 200$$

1. On admet que $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, est donnée sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f'(t) = 4\mathrm{e}^{-0,02t}$$

   Quelle information peut-on en déduire sur les variations de la fonction f ?

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite $\mathcal{D}$, asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.



2. Donner, à l'aide du graphique, la limite de la fonction f en $+\infty$.

Cette valeur représente la quantité limite de l'antidouleur présent dans le sang.

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si au bout de vingt-quatre heures, le sang contient au moins 50 % de la quantité limite de l'antidouleur.
   Déterminer si le débit de perfusion est satisfaisant.

4. On admet que la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion est égale à

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que la fonction F, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = 10\,000\mathrm{e}^{-0,02t} + 200t$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. On pose $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième, de I .

c. Donner une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion.