Baccalauréat STL 2013

L'intégrale de juin à septembre 2013

∽ Baccalauréat STL Biotechnologies Polynésie ∾
7 juin 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

On s'intéresse à la désintégration radioactive de l'iode 131.
On désigne par N_0 le nombre d'atomes d'iode 131 à l'instant 0 et par N le nombre d'atomes d'iode 131 à l'instant t (t étant exprimé en jours).
Les mesures à différents instants de $\dfrac{N}{N_0}$ ont donné les résultats suivants :

Temps t (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\dfrac{N}{N_0}$	1	0,82	0,69	0,61	0,49	0,43	0,36	0,30	0,26

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Temps t (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$z = \ln\left(\dfrac{N}{N_0}\right)$									

2. Représenter le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ;\ z_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

   On prendra comme unités 1 cm pour 2 jours sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés.
5. Tracer D dans le repère précédent.
6. En déduire que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-0,08t-0,02}$.
7. Que vaut le rapport $\dfrac{N}{N_0}$ au bout de 20 jours ?
8. Au bout de combien de jours, la quantité initiale a-t-elle été divisée par 10 ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et préciser la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. On considère l'algorithme suivant (N désigne un entier naturel)

Entrée :	Saisir la valeur de N
Initialisation :	Affecter à i la valeur 0
	Affecter à A la valeur 25
Traitement :	Tant que $i < N$
	Affecter à i la valeur de $i+1$
	Affecter à A la valeur de $1,05 \times A - 0,1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher A

Pour $N = 4$, l'arrondi à 10^{-2} du nombre affiché est :

a. 26,15 **b.** 28,63 **c.** 29,96 **d.** 30,82.

2. L'ensemble des solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$ de l'inéquation

$$(1-x)\ln x \leqslant 0$$

est :

a. $]0\,;1]$ **b.** $[1\ ;\ +\infty[$ **c.** $]0\ ;\ \text{e}]$ **d.** $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\text{e}^{2x} - x\right)\,\text{d}x$.

a. $I = \dfrac{\text{e}^2-2}{2}$ **b.** $I = \dfrac{2-\text{e}^2}{2}$ **c.** $I = \text{e}^2 - 2$ **d.** $I = \text{e}^2 - \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Dans cet exercice, on appelle « poids de naissance », la masse, exprimée en grammes, d'un nouveau né. Les résultats seront arrondis au centième pour les probabilités et à l'entier pour les poids de naissance donnés en grammes.

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

On s'intéresse au poids de naissance (exprimé en grammes) des enfants dans une région donnée. On note X la variable aléatoire qui, à un enfant choisi au hasard dans une maternité, associe son poids de naissance. On admet que X suit la loi normale d'espérance 3 300 et d'écart type 600.
On choisit un enfant au hasard dans cette maternité.

1. Déterminer la probabilité que cet enfant ait un poids de naissance compris entre 2 700 g et 3 900 g.

2. Déterminer l'entier h tel que $P(3300 - h \leqslant X \leqslant 3300 + h)$ soit égale à 0,95 à 10^{-2} près.
Interpréter le résultat obtenu.

3. Quelle est la probabilité que cet enfant ait un poids de naissance inférieure à 2 100 g ?

Partie B

Dans cette partie, on considèrera l'hypotrophie sévère qui concerne les enfants dont le poids de naissance est inférieur ou égal à 2 170 g. On admet que la probabilité qu'un enfant choisi au hasard soit concerné par une hypotrophie sévère est égale à 0,03.

Dans une maternité naissent 100 enfants par mois. Le nombre de naissances dans cette maternité est suffisamment important pour que le choix d'un enfant soit assimilé à un tirage avec remise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre d'enfants concernés par une hypotrophie sévère.

1. Justifier que la variable Y suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,03$.
2. Déterminer la probabilité qu'au moins un enfant soit concerné par une hypotrophie sévère au cours d'un mois donné.

Partie C

Dans une autre région, on s'intéresse à la proportion p des enfants qui ont un poids de naissance compris entre 2 600 g et 4 000 g.
En prenant un échantillon de 500 enfants nés dans cette région, on observe que 370 enfants ont un poids de naissance compris entre 2 600 g et 4 000 g.
Donner une estimation de p par un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %.

EXERCICE 4 **7 points**

Les deux premières parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Plusieurs questions de la partie C peuvent être traitées de façon indépendante.

Lors de l'administration d'un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu, on désigne par $y(t)$ la quantité (en μg) d'analgésique présente dans l'organisme d'un patient en fonction de l'instant t (en min). On admet que y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + 0,14y = 2$$

où y' est la fonction dérivée de y.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (E)

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

Partie B : Étude d'une fonction f .

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$(t) = 14,29\left(1 - \mathrm{e}^{-0,14t}\right).$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
On prendra comme unités 1 cm pour 2 min sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 μg sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Que représente la droite D d'équation $y = 14,29$ pour la courbe C?
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0~;~+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f'(t) = 2,0006\mathrm{e}^{-0,14t}$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

a. Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs seront arrondies au dixième.

t	0	5	10	15	20	30
$f(t)$			10,8			

b. Tracer les droites T et D puis la courbe représentative C dans le repère orthogonal.

Partie C : Exploitation des résultats de la partie B

La fonction f étant la fonction définie dans la partie B, on admet que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;30]$, $f(t)$ représente, à l'instant t, la quantité d'analgésique présente dans l'organisme au cours d'une perfusion.
La quantité $Q = 14,29\,\mu$g s'appelle « quantité d'analgésique à l'équilibre ».

1. Cette quantité Q peut-elle être atteinte ? Justifier la réponse.
2. À l'aide de la courbe C, déterminer graphiquement le temps au bout duquel la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient atteint la moitié de Q. Arrondir à l'entier le plus proche.
3. Au bout de 25 minutes, quel pourcentage représente la quantité d'analgésique par rapport à la quantité Q ?

∾ Baccalauréat STL Biotechnologies 19 juin 2013 ∾
Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **5 points**

Suite à un gros orage, la plage municipale de la commune d'Aistéhel subit une pollution momentanée du fait du débordement de la station d'épuration.

La concentration en bactéries E. coli (Escherichia coli) est retenue comme indicateur de contamination d'origine fécale.

Rappel (simplifié) des normes de qualité des eaux de baignade :

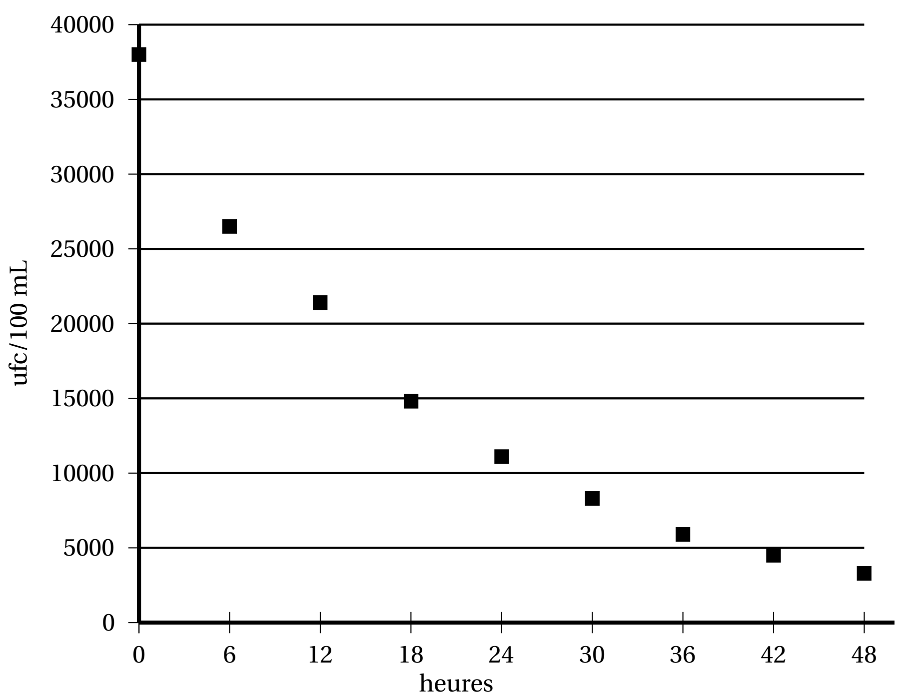
Qualité de l'eau	bonne	moyenne	mauvaise
Concentration en E. coli en ufc/100 mL(*)	0 à 100	100 à 2 000	supérieur à 2 000

(*) *ufc : unités formant colonies*

Des analyses sont faites toutes les six heures afin de suivre l'évolution de la concentration en E. coli. Les mesures des deux premiers jours sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Durée écoulée en heures (t_i)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Concentration en E. coli (y_i) (ufc/100 mL)	38 000	26 500	21 400	14 800	11 100	8 300	5 900	4 500	3 300

Ces mesures sont représentées graphiquement ci-dessous.



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

PARTIE A :

1. Indiquer pourquoi un ajustement affine ne paraît pas approprié.
2. On propose de réaliser un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$ où y_i désigne la i-ème mesure de la concentration en E. coli.
   a. Recopier sur votre feuille et compléter le tableau fourni en annexe 1 (arrondir les résultats à 10^{-3} près).
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en t selon la méthode des moindres carrés.
   On donnera la réponse sous la forme $z = at + b$, en arrondissant les coefficients a et b à 10^{-3} près.
   c. On considère désormais comme ajustement affine de z en t , la droite d'équation $z = -0,05t + 10,53$. En déduire un ajustement exponentiel de la concentration en E. coli de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{kt}$ (C et k étant deux constantes à déterminer à 10^{-2} près).
   d. Pour cette question, on prendra $y(t) = 37\,400\mathrm{e}^{-0,05t}$.
   - En supposant que le modèle reste valide au-delà des deux premiers jours, quelle concentration est attendue trois jours après le début des mesures ? (la valeur sera arrondie à 10^{-2} près).
   - Au bout de combien d'heures après le début des mesures la concentration correspondra-t-elle à une eau de baignade de bonne qualité ?

PARTIE B :

On appelle (c_n) la concentration en E. coli au temps n (où n est le temps en heures).
Un technicien du laboratoire où sont réalisées les analyses propose de modéliser l'évolution de la concentration en E. coli par la suite géométrique (c_n) pour laquelle :

- $c_0 = 38\,000$
- la raison est $q = 0,947$.

Comparer ce second modèle au modèle proposé à la question 2. d. de la partie A.
Argumenter votre réponse.

Pour cette question, le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 2 **4 points**

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + 0,5y = 12.$$

1. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la fonction c solution de l'équation différentielle (E) telle que $c(0) = 0$.

PARTIE B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 24\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right).$$

On appelle f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer la limite en $+\infty$ de f ; que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

4. Représenter cette fonction sur une feuille de papier millimétré à remettre avec la copie.
Unités graphiques : 1 cm en abscisse ; 0,5 cm en ordonnée

EXERCICE 3 **5 points**

La courbe (C) tracée à l'annexe 2 est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On constate sur la représentation graphique que :

- La tangente (T) à la courbe (C) au point A$(0\,;\,3)$ passe par le point I$(1\,;\,5)$.
- La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

1. En utilisant les données précédentes et le graphique, préciser :

a. La valeur du nombre réel $f(0)$ et la valeur du nombre réel $f'(0)$ (justifier votre raisonnement).

b. La limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On note (S) l'aire de la partie du plan située entre la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
Préciser un encadrement de l'aire (S), en unités d'aire par deux entiers consécutifs.

3. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (4x+2)\text{e}^{-x} + 1.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = (2-4x)\text{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de f'. En déduire le sens de variation de f.

4. Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-4x-6)\text{e}^{-x} + x.$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire (S), en unités d'aire.

c. Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 2 ?

EXERCICE 4 **6 points**

Une agence de voyages propose, dans un de ses circuits très fréquenté, une excursion sous forme d'option supplémentaire.

Le responsable de l'agence fait l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est $0,25$.

On choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Tous les clients ont la même chance d'être choisis.
On considère que le nombre de clients de l'agence est suffisamment grand pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage successif avec remise de 60 clients.

Les trois parties A, B, C peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A : loi binomiale

On appelle X la variable qui, à tout échantillon de 60 clients, associe le nombre des clients qui ont pris l'option supplémentaire.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$.
2. À l'annexe 3, ont été reportées dans un tableau les valeurs approchées des probabilités $P(X = k)$, pour $6 \leqslant k \leqslant 25$ (sauf la valeur pour $k = 10$).

   Les valeurs des probabilités $P(X = k)$ pour $k \geqslant 26$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$ sont inférieures à 10^{-3} et elles seront considérées comme nulles.

   On a également tracé l'histogramme de la variable aléatoire X.

   a. Hachurer sur l'histogramme de l'annexe 3 à rendre avec la copie, l'aire correspondant à la probabilité $P(X \leqslant 21)$.

   b. En utilisant le tableau de valeurs de l'annexe 3, ou par toute autre méthode, déterminer une valeur approchée de $P(X \leqslant 21)$, en détaillant la démarche utilisée (arrondir le résultat à 10^{-2}).

PARTIE B : approximation par une loi normale

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies.
On appelle Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ et approximant la loi binomiale $\mathscr{B}(60\,;\,0,25)$ (de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$).

1. Déterminer les paramètres μ et σ (valeurs arrondies à 10^{-3} près). Justifier votre réponse.
2. On considère désormais que $\mu = 15$ et $\sigma = 3,35$.

   a. Déterminer, sans utiliser la calculatrice, $P(15 \leqslant Y \leqslant 18,35)$ (valeur arrondie à 10^{-3} près). Justifier votre raisonnement.

   b. Sans utiliser la calculatrice, justifier que $P(15 \leqslant Y \leqslant 25,05)$ a pour valeur approchée 0,498 5.

   c. Sachant que $P(21 \leqslant Y \leqslant 25,05)$ a pour valeur approchée 0,035 29, déduire des questions précédentes une valeur approchée de $P(Y \leqslant 21)$.

   d. Le résultat précédent est-il cohérent avec le résultat de la question A 2. b) ?

PARTIE C : prise de décision

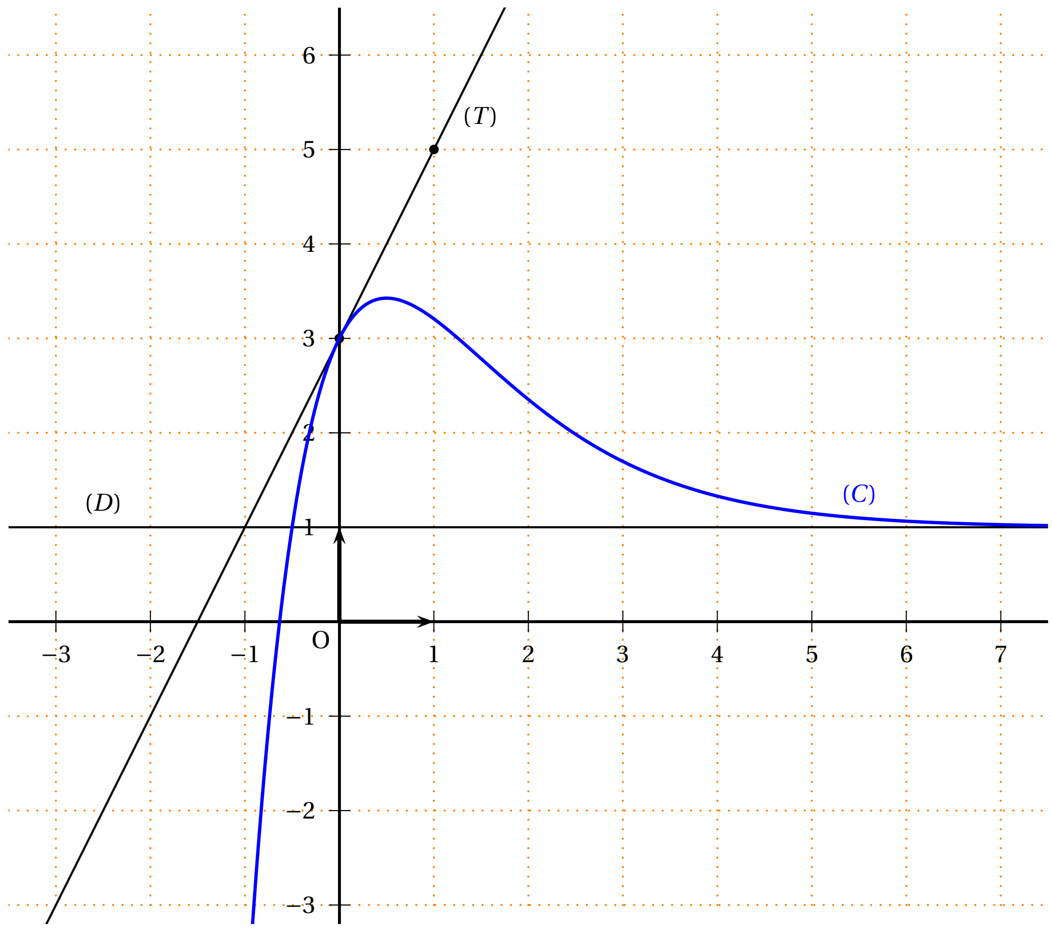
1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients. On note J cet intervalle.
2. Pour vérifier l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est 0,25, au niveau de confiance 95 %, l'adjoint du responsable de l'agence choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Il observe alors qu'un tiers des clients a pris cette option.

   En utilisant l'intervalle J précédent, l'adjoint du responsable de l'agence décide de rejeter l'hypothèse, au niveau de confiance 95 %. Êtes-vous d'accord ? Justifier votre réponse.

ANNEXE 1 : À RECOPIER SUR VOTRE FEULLE ET À COMPLÉTER
(EXERCICE 1)
Cette annexe n'est pas à rendre

t_i (en heures)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
$z_i = \ln\left(y_i\right)$ (à 10^{-3} près)									

ANNEXE 2
(EXERCICE 3)
Cette annexe n'est pas à rendre



ANNEXE 3 À RENDRE AVEC LA COPIE
(EXERCICE 4)

Histogramme de la loi binomiale $\mathscr{B}(60\ ;\ 0,25)$ (de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$)

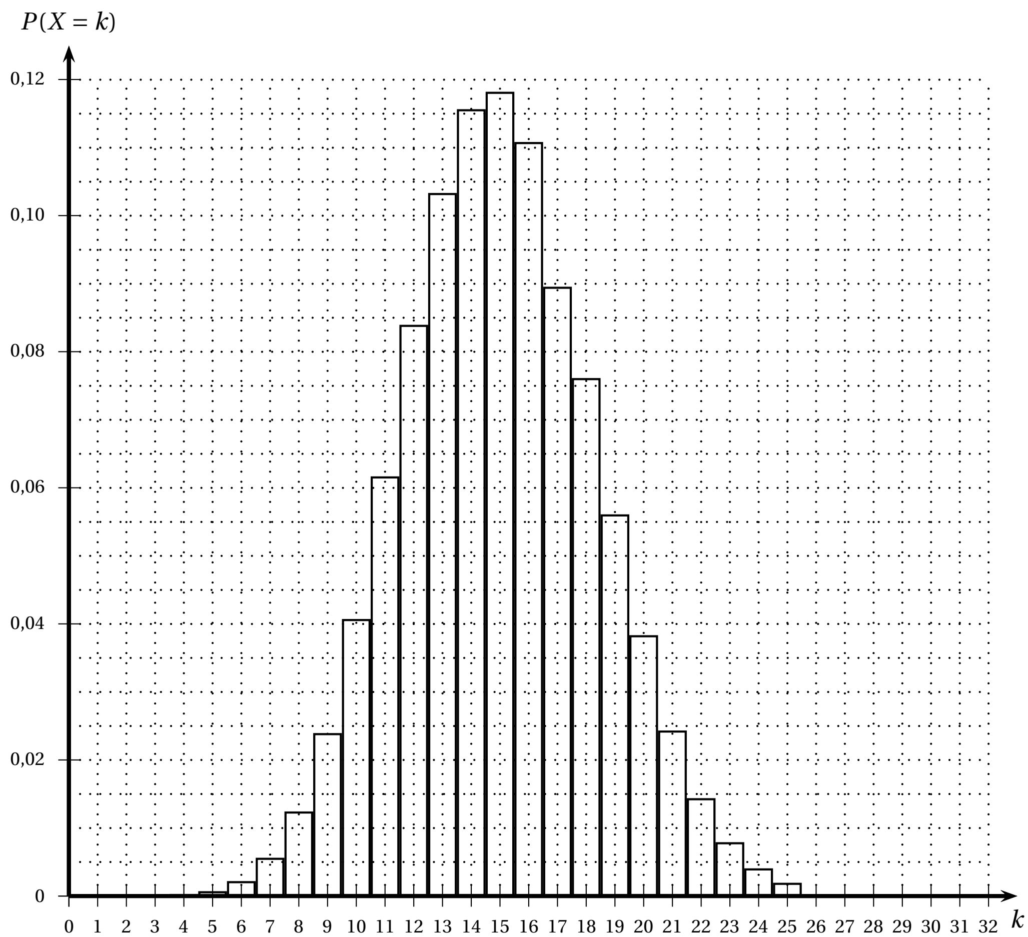


Table des valeurs de la loi binomiale $\mathscr{B}(60\ ;\ 0,25)$ pour $6 \leqslant k \leqslant 25$
(sauf la valeur pour $k = 10$)

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X = k)$	0,002 2	0,005 6	0,012 4	0,024 0	...	0,061 7	0,084 0	0,103 4	0,115 7	0,118 2

k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$P(X = k)$	0,110 8	0,095 6	0,076 1	0,056 1	0,038 3	0,024 3	0,014 4	0,007 9	0,004 1	0,002 0

Baccalauréat STL Métropole Biotechnologies 20 juin 2013

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Le responsable d'un site de compostage fait un bilan de l'évolution des quantités de déchets compostés dans son entreprise.
Il constate qu'en 2002, sur le site, 5 900 tonnes de déchets ont été traitées et qu'ensuite les quantités traitées augmentent régulièrement de 15 % par an.
On admet que la progression se poursuivra au même rythme jusqu'en 2020.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en tonnes, de déchets traités durant l'année $2002 + n$. On aura ainsi $u_0 = 5900$.

1. Préciser la nature, le premier terme et la raison de la suite (u_n).
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer la quantité de déchets traités en 2006. Arrondir à l'unité près.
3. Déterminer à partir de quelle année la quantité de déchets traités dépassera les 20 000 tonnes. Justifier votre réponse.
4. Calculer la quantité totale de déchets traités depuis le début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2020. Arrondir à l'unité près.

EXERCICE 2 **5 points**

On introduit un inoculum bactérien dans un bioréacteur contenant un milieu de culture. On mesure la population bactérienne toutes les heures à partir de la troisième heure. Le tableau suivant donne le résultat de ces mesures.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries	$1,09 \times 10^5$	$2,68 \times 10^5$	$7,31 \times 10^5$	$2,2 \times 10^6$	$6,93 \times 10^6$	$1,79 \times 10^7$	$5,12 \times 10^7$

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, les valeurs étant arrondies à 10^{-2} près.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
$y_i = \ln(N_i)$	11,60				15,75		

2. Tracer dans le repère orthonormé donné en annexe, page 17, le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme unité 1 cm sur chaque axe.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.
   Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. On suppose que l'évolution du nombre de bactéries se poursuit suivant le même modèle jusqu'à ce que les éléments nutritifs commencent à manquer.
   a. Déterminer, à 10^6 près, le nombre de bactéries dans le bioréacteur au bout de 11 heures.

b. Les éléments nutritifs commencent à manquer dès que le nombre de bactéries atteint 3×10^9.

À quel moment cela se produit-il ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3 **5 points**

Une société fabrique des tubes à essai.
Une étude a montré que la probabilité pour un tube, pris au hasard dans la production, de présenter un défaut est égale à 0,03.
On suppose la production suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

Dans cet exercice, toutes les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près.*

1. On prélève 10 tubes dans la production. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement.

  a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,03.

  b. Déterminer la probabilité $P(X = 1)$.

  c. Déterminer la probabilité que, parmi les 10 tubes, un tube au moins présente un défaut.

2. On prélève 300 tubes dans la production. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type 3.

  a. Déterminer la probabilité que le prélèvement contienne entre 6 et 12 tubes défectueux.

  b. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de tubes défectueux pour un échantillon de taille 300. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.

  c. Le responsable qualité veut vérifier la production. Pour cela, il prélève un échantillon de 300 tubes.

  Dans cet échantillon, 14 tubes sont défectueux. Doit-il faire procéder à un réglage des machines ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : Lecture graphique

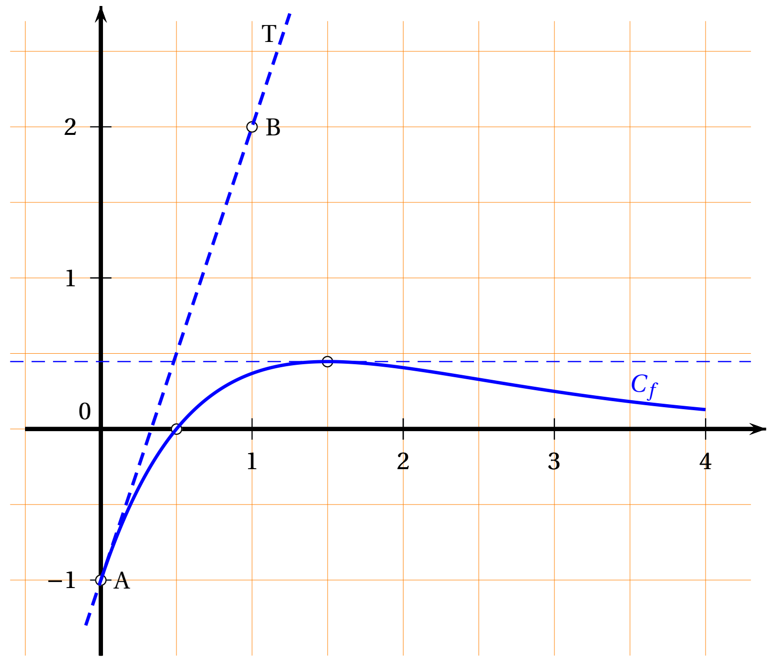
La courbe C_f tracée ci-dessous est la représentation graphique sur $[0~;~4]$ d'une fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$.

On admet que :

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{1}{2}$.

La tangente T à la courbe C_f au point A $(0~,~-1)$ passe par le point B $(1~,~2)$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ,\ 4]$.

2. Déterminer les valeurs de $f'(0)$ et de $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Partie B : Étude de la fonction

On admet que la fonction f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

2. La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

On donne ci-dessous les tableaux de variation et des tableaux de valeurs de trois fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$: F_1, F_2 et F_3.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$F_1(x)$	3	$\searrow$	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_1(x)$	3	0	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_2(x)$	-1	↘	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↗	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_2(x)$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$-4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}$

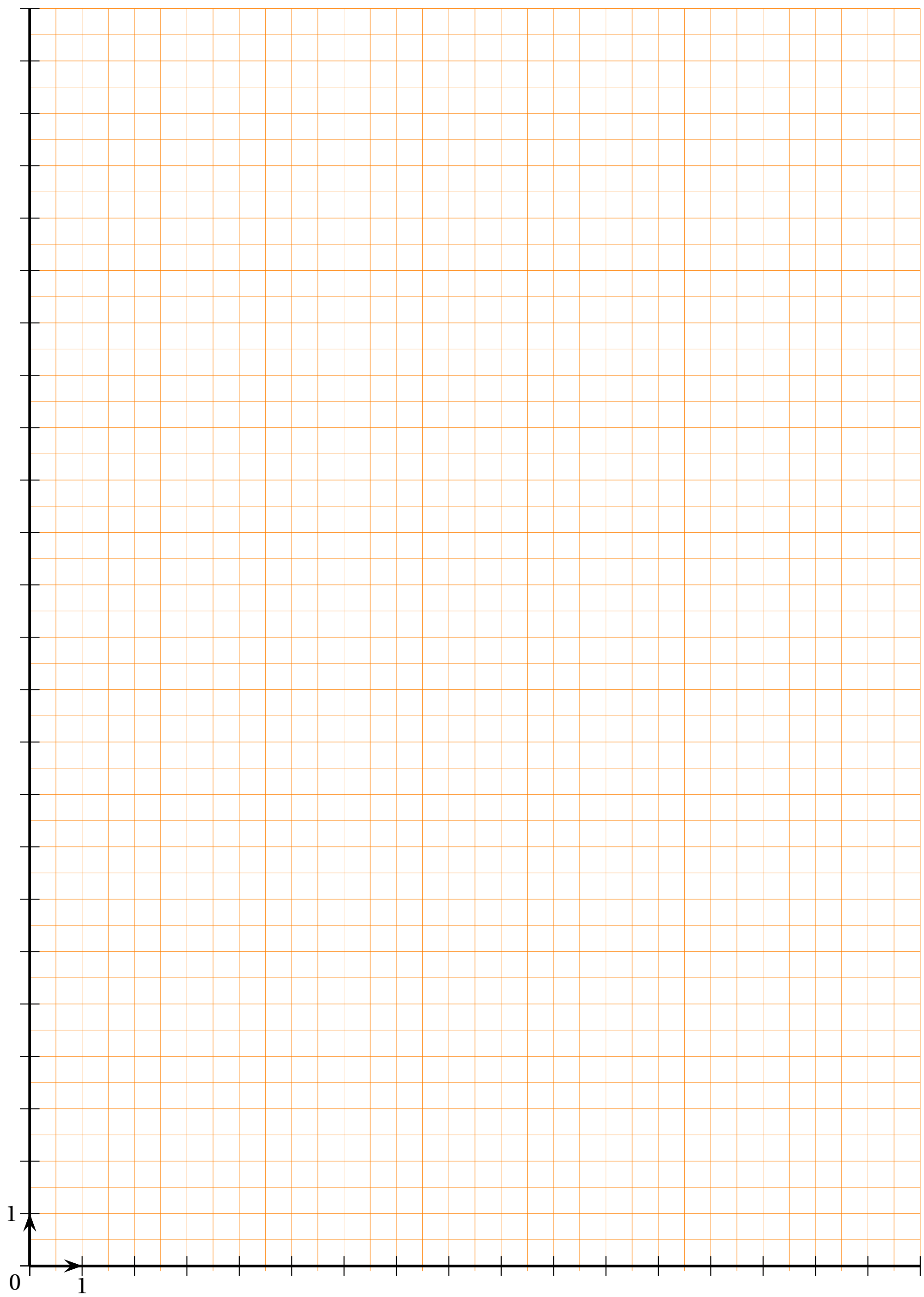
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	↗	$\sqrt{\mathrm{e}}$	↘	$-\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$

1. Une de ces fonctions est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$. Laquelle ? Justifier votre choix.

2. À l'aide de cette fonction, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **Annexe(à rendre avec la copie)**



∽ Baccalauréat STL Métropole Biotechnologies ∾ 12 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Monsieur Durand est embauché le 1er janvier 2012. Son salaire mensuel est de 1 300 euros en 2012, puis il augmentera de 1,7 % chaque année.
Madame Martin est embauchée à la même date. Son salaire mensuel est de 1 150 euros en 2012, puis il augmentera de 2,3 % chaque année.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le salaire mensuel de Monsieur Durand au cours de l'année $2012+n$ et b_n celui de Madame Martin au cours de l'année $2012+n$.

1. **a.** Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n ; en déduire la nature de la suite (a_n).
   b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
2. Déterminer l'expression de b_n en fonction de n.
3. Pour répondre à une question concernant le salaire de Monsieur Durand, un élève propose l'algorithme ci -dessous :

B prend la valeur 1 300
N prend la valeur 0
Tant que $B \leqslant 1400$
Remplacer N par $N+1$
Remplacer B par $B \times 1,017$
Fin Tant que
Afficher $N+2012$

   a. Faire fonctionner cet algorithme.
   b. Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?
4. **a.** Écrire un algorithme permettant de déterminer l'année où le salaire mensuel de Madame Martin dépassera 1 500 euros.
   b. À partir de quelle année le salaire mensuel de Madame Martin dépassera-t-il 1 500 euros ?
5. À partir de quelle année le salaire mensuel de Madame Martin dépassera-t-il celui de Monsieur Durand ?

EXERCICE 2 **7 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le tableau suivant donne la tension artérielle (systolique) moyenne y_i d'une population d'hommes à différents âges x_i :

Âge x_i en années	25	40	50	60	70
Tension artérielle moyenne y_i en mm de mercure	118,2	124,3	131,9	136,5	142,5

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal. L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 100 et on prendra pour unités : 2 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 mm de mercure sur l'axe des ordonnées.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite D d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-4} près).

   Pour la suite de l'exercice, on prendra pour équation de la droite D : $y = 0,55x + 103,75$.
3. Tracer la droite D sur le graphique précédent.

4. Avec ce modèle d'ajustement, estimer graphiquement, en laissant apparents les traits de construction, la tension artérielle moyenne d'un homme de 75 ans.
5. Avec ce modèle d'ajustement, déterminer algébriquement à partir de quel âge un homme a une tension artérielle moyenne supérieure à 150.

Partie B

Dans la population étudiée en partie A, 30 % des hommes souffrent d'hypertension artérielle.

1. On considère 200 hommes pris au hasard dans cette population et on mesure leur tension artérielle moyenne. La population est suffisamment importante pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'hommes souffrant d'hypertension.
   Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre des hommes souffrant d'hypertension artérielle dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart type $6,5$.
   Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, que dans ce groupe de 200 hommes :
   a. entre 47 et 73 individus souffrent d'hypertension ;
   b. plus de 73 individus souffrent d'hypertension.
3. Un médecin constate que, parmi 100 hommes en surpoids choisis au hasard dans cette population, 42 souffrent d'hypertension.
   Peut-il considérer que cette proportion d'hommes hypertendus est conforme à celle de la population masculine étudiée ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 **8 points**

La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.
On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.
À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.
On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.
On admet que f est la solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,61y = 1,22 \quad \text{vérifiant} \quad f(0) = 24.$$

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y' + 0,61y = 1,22$$
   où y est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.
   La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}$, est donnée en annexe.
3. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
4. **a.** Déterminer $f'(t)$ où f' est la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
5. Déterminer graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   a. la température d'un fruit au bout de 4 heures ;
   b. au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale.
6. **a.** Démontrer que la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = 2t - \dfrac{2200}{61}\mathrm{e}^{-0,61t}$ est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.
   b. En déduire $I = \displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t$ (valeurs exacte puis approchée au centième).

c. On admet que la température moyenne d'un fruit durant les 6 premières heures est $\dfrac{I}{6}$.
Déterminer cette température moyenne au dixième de degré près.

7. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\dfrac{7}{8}$ en moins de 6 heures.
Peut-on considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.